Übungen zu Mathematik III
Blatt 4

Aufgabe 1: Bei einem mathematischen Pendel mit der Länge ℓ kann (für kleine Auslenkungen) die Schwingungszeit T durch die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

berechnet werden.

a) Es sei $g \approx 9.81\text{ms}^{-2}$. Auf wie viel Prozent genau kann man die Schwingungsdauer T angeben, wenn man die Pendellänge auf 1% genau bestimmt?

b) Die Pendellänge sei nun $\ell = 1$ m. Es soll die Erdbeschleunigung g mit einer Genauigkeit von $\Delta g = 0.5 \cdot 10^{-5}$ exakt bestimmt werden. Wie genau muss dann die Angabe der Schwingungsdauer T wenigstens sein?

Aufgabe 2: Das Brechungsgesetz von Snellius lautet:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,.$$

Dabei ist α der Einfallswinkel (gegen das Lot) und β der Winkel zwischen Lichtstrahl und Einfallslot nach der Brechung. $n \geq 1$ gibt den Brechungsindex (Materialkonstante) an. Wie groß ist der relative Fehler bei der Berechnung des Brechungswinkels β, wenn der Einfallswinkel mit einem Fehler $\Delta\alpha$ gemessen wurde und der Brechungsindex als genau bekannt vorausgesetzt wird? Für welche Winkel $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist der Fehler am größten?

Aufgabe 3: Das Widerstandsmoment W eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt wird durch die folgende Formel beschrieben:

$$W(b,h) = \frac{1}{6}bh^2\,,$$

wobei b die Breite des Balkens bezeichnet und h die Höhe ist. Wir messen folgende Größen:

$$b = (18 \pm 0.01)\text{cm} \quad \text{und} \quad h = (10 \pm 0.01)\text{cm}\,.$$

Bestimmen Sie den relativen Fehler bei der Berechnung des Widerstandsmoments.

Aufgabe 4: Wir suchen die Schwingungsdauer T eines elektromagnetischen Schwingkreises, der aus der Kapazität C und der Induktivität L besteht. Die Formel lautet:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Wir messen $L = (5 \pm 0.05)$ mH und $C = (8 \pm 0.2)$ nF. Bestimmen Sie den absoluten Fehler bei der Bestimmung der Swingungsdauer.

Aufgabe 5: Wir betrachten einen Hohlzylinder mit dem Innenradius $r_i = (6 \pm 0.01)$ cm, dem Außenradius $r_a = (10 \pm 0.01)$ cm und der Höhe $h = 20$ cm. Wir wollen das Volumen des Hohlzylinders berechnen. Wie groß ist der absolute Fehler, wenn wir unsere Messungen verwenden?

Aufgabe 6: Sie wollen den Durchmesser d einer zylindrischen Scheibe bestimmen. Dazu messen Sie insgesamt 6-mal mit gleicher Genauigkeit. Es ergaben sich die folgenden Werte in cm:

$$5.61\,, \quad 5.59\,, \quad 5.50\,, \quad 5.68\,, \quad 5.65 \quad \text{und} \quad 5.52\,.$$

a) Sie wollen ihre Messung in der Form $d \pm \Delta d$ angeben. Bestimmen Sie dazu den Messwert d und die Toleranz Δd mit statistischen Methoden.

b) Bestimmen Sie ein Vertrauensintervall mit Konfidenzniveau 90%. Arbeiten Sie hierzu mit Tabelle 1.

Aufgabe 7: Die Kapazität eines Kondensators wurde 20-mal gemessen. Die Auswertung der Messreihe ergab dabei eine mittlere Kapazität von $C = 56.8$ mF und eine Standardabweichung von $s = 1.9$ mF.

a) Wie lauten die Vertrauensgrenzen für den "wahren" Wert (Mittelwert) bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1%?

b) Wie ändern sich diese Grenzen, wenn man die größere Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% in Kauf nehmen will?

Aufgabe 8: Wir wollen die Dichte ρ einer Eisenkugel experimentell bestimmen. Dazu bestimmen wir die Masse m und den Durchmesser d der Kugel in unabhängigen Messreihen. Wir erhalten die folgenden Größen:

$$\text{Masse:} \quad m = 560.7\,\text{g}\,, \quad \Delta m = s_{\bar{m}} = 0.5\,\text{g}$$

$$\text{Durchmesser:} \quad d = 5.11\,\text{cm}\,, \quad \Delta d = s_{\bar{d}} = 0.02\,\text{cm}$$

a) Bestimmen Sie den Wert für die indirekte Messgröße ρ (Dichte).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der differentiellen, linearen Fehlerrechnung einen Wert für die zu erwartende Abweichung $\Delta\rho$.

c) Bestimmen Sie $\delta\rho$ mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

Aufgabe 9: Wir wollen die Federkonstante c einer elastischen Feder bestimmen. Diese hängt wie folgt mit der Schwingungsmasse m und der Schwingungsdauer T zusammen:

$$c = c(m, T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2} \, .$$

In unabhängigen Versuchen wurden 10-mal m und T bestimmt (vgl. Tabelle 2).

Bestimmen Sie den Messwert für die Federkonstante in der Form $c \pm \Delta c$, indem Sie die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit $\Delta m = s_{\bar{m}}$ und $\Delta T = s_{\bar{T}}$ anwenden.

Anzahl n der Messwerte	Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	$\gamma = 68{,}3\,\%$	$\gamma = 90\,\%$	$\gamma = 95\,\%$	$\gamma = 99\,\%$
2	1,84	6,31	12,71	63,66
3	1,32	2,92	4,30	9,93
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,15	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,90	2,37	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
15	1,04	1,77	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,63
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,00	1,65	1,96	2,58

Abbildung 1: Tabelle zur Bestimmung des Vertrauensintervalls in Aufgabe 6.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{m}{\mathrm{g}}$	198	199	203	200	202	198	201	197	203	199
$\frac{T}{\mathrm{s}}$	2,01	2,04	1,96	1,98	2,00	2,05	1,97	1,98	2,04	1,97

Abbildung 2: Messwerte zu Aufgabe 9.