Probeklausur zu
Mathematik II
SoSe 2022

Prof. Dr. M.Pieper

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Vorname: Nachname:

Note: Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
max. Punkte	10	10	10	10	40
Punkte					

Hinweise:

- Bitte nutzen Sie Vorder- und Rückseite zum Bearbeiten der Aufgaben und schreiben Sie Ihre Lösungen bitte immer direkt zu den entsprechenden Aufgaben.
- Bitte lösen Sie *nicht* die Heftklammern.
- Sie dürfen einen normalen, nicht grafikfähigen Taschenrechner verwenden.
- Erlaubt ist ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt als Formelsammlung und die Papula Tabellen.

Aufgabe 1: (Differentialgleichungen)

a) Geben Sie die Ordnung folgender Differentialgleichung an:

$$y'(x) = \frac{y(x)}{2\sqrt{x}}\,.$$

Ist die Differentialgleichung linear oder nichtlinear? Ist Sie homogen oder inhomogen?

b) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

c) Ein PD-Regler wird im Zeitbereich durch folgende Gleichung beschrieben:

$$u(t) = K_P\,(e(t) + T_D\,e'(t))\ .$$

Bestimmen Sie die zugehörige Gleichung, welche den PD-Regler im Laplace Bereich beschreibt. Gehen Sie von verschwindenden Anfangswerten aus!

Aufgabe 2: (Differentialgleichungen 2. Ordnung)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$2y''(x) + 4y'(x) + 2y(x) = \sin(x)\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = \sin(x)$ und $y_2(x) = \cos(x)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 3: (Taylor und Fourier)

a) Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ in zweiter Näherung, d.h. entwickeln Sie $f(x) = \sqrt{x}$ um einen geeigneten Entwicklungspunkt nach Taylor und berücksichtigen Sie hierbei die Glieder erster und zweiter Ordnung. Zum Vergleich: Der korrekte Wert lautet $\sqrt{3} = 1.7321$.

b) Bestimmen Sie eine Taylorapproximation 2. Ordnung des Skalarfeldes

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^2$$

im Punkt $P = (0, 0)$.

c) Wir betrachten das folgende Zeitsignal:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}\sin(4t) + + \frac{1}{6}\sin(6t)\right) .$$

Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen über die zugehörige Fourier Analyse:

i) Wie viele Peaks besitzt die Fourier Analyse?

ii) Finden wir einen Peak bei $f = 0$?

iii) Wie lautet die Grundfrequenz und wie die zugehörige Amplitude?

Aufgabe 4: (Ausgleichsrechnung/Interpolation)

Es wurden folgende Messwertpaare gemessen:

$$(0,0)\,, \quad (1,3)\,, \quad (2,8) \quad \text{und} \quad (3,15)\,.$$

Wir suchen eine Ausgleichsfunktion, welche die Daten beschreibt.

a) Welcher Ansatz ist besser geeignet, eine Ausgleichsgerade oder eine Ausgleichsparabel? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Bestimmen Sie die Ausgleichsfunktion, indem Sie einen sinvollen Ansatz machen. Nutzen Sie hierbei bekannte Eigenschaften wie $f(0) = 0$ aus. Stellen Sie anschließend die Normalengleichungen auf und lösen Sie das zugehörige 2×2 Gleichungssystem!

c) Wie lautet der Funktionswert bei $x = 1.3$? Interpolieren Sie dazu die entsprechenden Messwerte linear!

Viel Erfolg!