Übungen zu Mathematik I
Blatt 10

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Wendepunkt zu den gemessenen Daten, die in Tabelle 1 gegeben sind. Die Messdaten beschreiben die folgende Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{4-4x}} \,.$$

Berechnen Sie den Wendepunkt analytisch und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Die erste Ableitung lautet:

$$f'(x) = \frac{4e^{4-4x}}{(1 + e^{4-4x})^2} \,.$$

Lösung: Da die x-Werte äquidistant sind, genügt es die Differenz der aufeinanderfolgenden Funktionswerte zu betrachten. Diese wird in Tabelle 2 gezeigt. Im Wendepunkt liegt der größte Anstieg der Fuktion vor, d.h. hier ist die Differenz am größten. Die Werte lassen einen Wendepunkt zwischen $x = 1$ und $x = 1.2$ vermuten. Genauere Aussagen sind auf Grund der wenigen Messdaten nicht möglich.

Für die analytische Berechnung bestimmen wir die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \frac{16e^{4-4x}(e^{4-4x} - 1)}{(1 + e^{4-4x})^3} \,.$$

Der Zähler muss null werden, das bedeutet:

$$e^{4-4x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4-4x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \,.$$

Wir können jetzt mühsam mit der dritten Ableitung überprüfen, dass es sich um einen Wendepunkt handelt. Da wir uns aber das Berechnen der dritten Ableitung sparen wollen, betrachten wir den Vorzeichenwechsel in der zweiten Ableitung:

Bei $x = 1$ besitzt die zweite Ableitung eine Nullstelle. Entscheidend für das Vorzeichen ist die Klammer im Zähler. Wir setzen nacheinander z.B. $x_1 = 0.9$ und $x_2 = 1.1$ ein und erhalten

$$e^{4-4x_1} - 1 \approx 0.49 \quad \text{und} \quad e^{4-4x_2} - 1 \approx -0.32 \,,$$

was für einen Vorzeichenwechsel spricht.

Der Vergleich bestätigt, dass auf Grund der wenigen Daten unsere Bestimmung mit der Wertetabelle nur einen sehr ungenauen Bereich liefert, wobei dieser Bereich korrekt ist, da $x = 1$ dazu gehört.

Aufgabe 2: Der Dachboden eines Einfamilienhauses soll ausgebaut werden. Sein Querschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck (siehe Abb. 4 (links)). Wie müssen Breite x und

Höhe h des Zimmers gewählt werden, wenn der vorhandene Raum bei rechteckigem Zimmerquerschnitt maximal ausgenutzt werden soll?

Hinweis: Strahlensatz!

Lösung: Da das Volumen maximal werden soll, lautet die Zielfunktion: $V(x,h) = 10x \cdot h$. Die Nebenbedingung folgt aus dem Strahlensatz:

$$\frac{5}{h} = \frac{4}{4 - \frac{x}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad h = 5 - \frac{5}{8}x\,.$$

Setzen wir dies in die Zielfunktion ein, ergibt sich:

$$V(x) = -\frac{25}{4}x^2 + 50x \quad \Rightarrow \quad V'(x) = -\frac{25}{2}x + 50\,.$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum liefert:

$$V'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{25}{2}x + 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4\,.$$

Da die Zielfunktion eine nach unten geöffnete Parabel ist, liegt tatsächlich ein Maximum vor und zwar sogar ein globales, d.h. die Randwerte brauchen nicht betrachtet zu werden. Die Lösung lautet also: $x = 4$, $h = 2.5$ und $v_{max} = 100$.

Aufgabe 3: Aus einer rechteckigen Glasplatte mit den Seiten $a = 4$ dm und $b = 5$ dm ist das in der Abbildung punktiert unterlegte Stück herausgebrochen. Sein Rand wird durch den Graphen $f(x) = x^2 + 2$ mit $x \in [0\,;\,\sqrt{3}]$ beschrieben. Aus dem Reststück soll eine rechteckige Platte herausgeschnitten werden, und zwar so, dass diese maximalen Inhalt hat.

Wie sind die Seiten u und v der Platte zu wählen?

Lösung: Zielfunktion

$$A = u \cdot v$$

Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} v &= f(x) = x^2 + 2\,, \quad x \in [0\,;\,\sqrt{3}] \\ u &= 4 - x \end{aligned}$$

Das gesuchte absolute Maximum liegt am Rand bei $x = \sqrt{3}$. Damit ergibt sich: $u = 4 - \sqrt{3}$ und $v = 5$, mit einem maximalen Flächeninhalt von $11.3\,\mathrm{dm}^2$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die folgenden partiellen Ableitungen:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 - x_2^4 + x_1 x_2 x_3$

b) $f(\varphi, \vartheta) = \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega\vartheta)$

c) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$

Lösung:

a) $\partial_{x_1} f = 2x_1 x_2 + x_2 x_3$, $\partial_{x_2} f = x_1^2 - 4x_2^3 + x_1 x_3$, $\partial_{x_1} f = x_1 x_2$

b) $\partial_\varphi f = \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega\vartheta)$, $\partial_\vartheta f = -\omega \sin(\varphi) \cdot \sin(\omega\vartheta)$

c) $\partial_{x_1} f = x_2 e^{x_1^2+x_2^2} + 2x_1^2 x_2 e^{x_1^2+x_2^2}$, $\partial_{x_2} f = x_1 e^{x_1^2+x_2^2} + 2x_1 x_2^2 e^{x_1^2+x_2^2}$

Aufgabe 5: Wir betrachten die jährliche Verzinsung eines Anfangskapitals K_0 mit einem Zinssatz p. Nach n Jahren ergibt sich das Kapital K:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Wir betrachten das Kapital K in Abhängigkeit vom Zinssatz p und den Jahren n: $K = K(n, p)$.

Verwenden Sie die partiellen Ableitungen, um zu analysieren, wie sich K in Abhängigkeit von p und n verändert.

Hinweis: Formen Sie zum Ableiten die Klammer wie folgt um: $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = e^{n \cdot \ln(1+p/100)}$.

Lösung: Wir bestimmen zuerst die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_p K(n,p) &= \frac{K_0 \cdot n}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} \\ \partial_n K(n,p) &= K_0 \cdot e^{n \ln(1+p/100)} \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n . \end{aligned}$$

Änderung bzgl. p:

Wir betrachten die partielle Ableitung nach p. Diese ist positiv, da alle Parameter positiv sind. Damit steigt die Funktion, was bedeutet, dass das Kapital wächst, wenn p vergrößert wird. Verkleinern wir p so wird auch das Kapital kleiner.

Änderung bzgl. n:

Wir betrachten die partielle Ableitung bzgl. n. Da der Ausdruck im Logarithmus größer als eins ist, ist der Logarithmus positiv. Das gilt auch für die restlichen Parameter bzw. Terme. Damit steigt das Kapital bzgl. n. Wenn wir länger warten, d.h. n größer wird, erhalten wir ein größeres Kapital.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
f(x)	0,018	0,039	0,083	0,168	0,310	0,500	0,690	0,832	0,917	0,961	0,982

Abbildung 1: Messwerte zu Aufgabe 1

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
f(x)	0,018	0,039	0,083	0,168	0,310	0,500	0,690	0,832	0,917	0,961	0,982
Diff f(x)		0,021	0,044	0,085	0,142	0,190	0,190	0,142	0,085	0,044	0,021

Abbildung 2: Messwerte und Differenzen zu Aufgabe 1

Abbildung 3: Dachboden mit Zimmer (links) und Querschnitt (rechts)

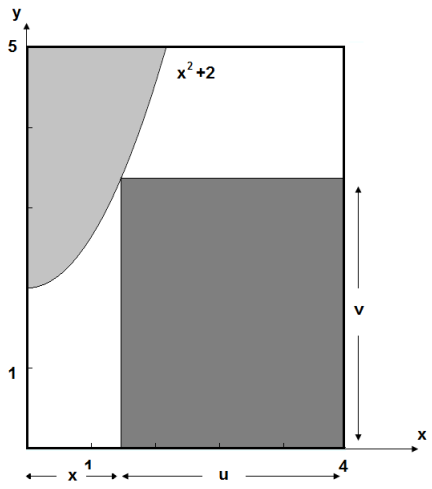


Abbildung 4: Glasscheibe mit fehlendem Stück (Aufg. 3)