Übungen zu Mathematik I
Blatt 11

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Gradienten der folgenden Skalarfelder:

a) $f(x,y) = x^3y^2 - 2y^4 + xy$

b) $f(x,y) = e^{x^2-2xy}$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Höhenlinien der folgenden Skalarfelder:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x - y \\ g(x,y) &= x^2 - y^2\,, \end{aligned}$$

die in Abb. 1 gezeigt werden. Überlegen Sie sich, wie das Gradientenfeld eingezeichent werden muss, d.h. wohin zeigen die Gradienten in den einzelnen Punkten?

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Richtungsableitung des Skalarfeldes

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy - yz^2$$

im Punkt $P = (1,2,3)$ in Richtung $\vec{v}^T = (1,1,1)$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = x^3 \sin(y) + e^x y^2$$

in Richtung des Vektors $\vec{v} = (1,1)^T$ im Punkt $P = (1,0)$.

Aufgabe 5: Finden Sie alle Extrema der Funktion

$$f(x_1,x_2) = 2x_1^4 + x_2^2 - x_1^2 + x_2\,.$$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der folgenden Skalarfelder:

$$f(x_1,x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2\,.$$

Zusatzaufgabe 1: Das elektrostatische Potential in der Umgebung einer negativen Punktladung, die sich im Ursprung befindet, wird beschrieben durch

$$U(\vec{x}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{x}|}\,,$$

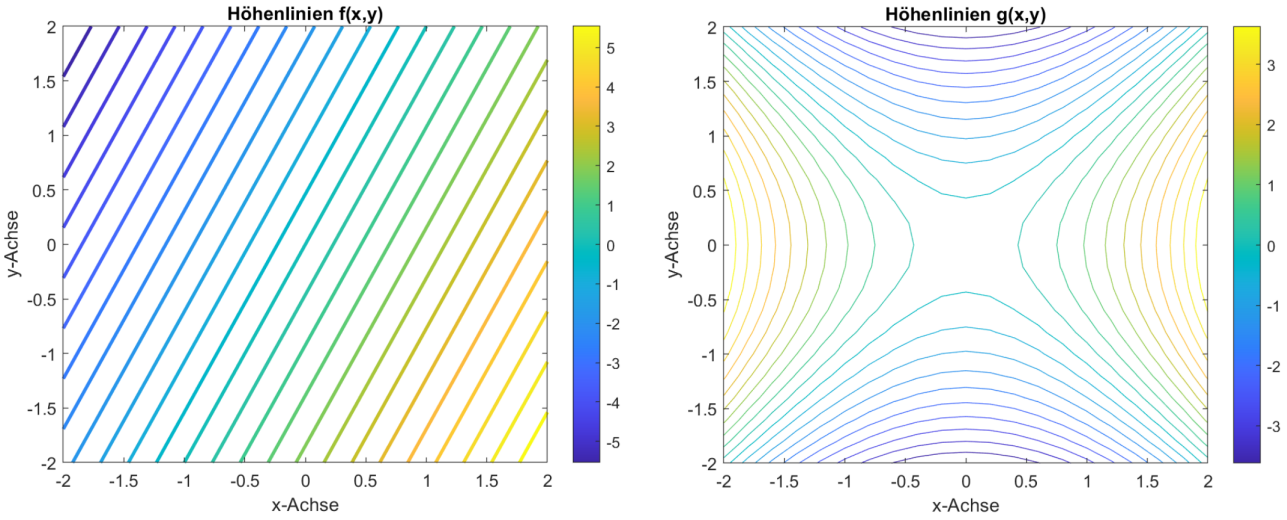


Abbildung 1: Höhenlinien zu Aufgabe 2

wobei wir mit $|\vec{x}|$ den Betrag des Vektors $\vec{x} = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)^T$ bezeichnen. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $P = (p_1\,,\, p_2\,,\, p_3)^T$. In welcher Richtung in P nimmt das Potential am stärkste zu? Wie groß ist dieser Maximalwert?

Zusatzaufgabe 2: Gegeben sei die Funktion:

$$f(x, y) = xy(x^2 + y^3) + 2x - 3y$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von f.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung:

$$\vec{v}_t := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

c) Bestimmen Sie die Richtung des maximalen Anstiegs im Ursprung, d.h. bestimmen Sie das Maximum der Ableitung:

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_t},$$

bzgl. des Parameters t.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und c) und interpretieren Sie diese.