# Übungen zu Mathematik I
## Blatt 11

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie den Gradienten der folgenden Skalarfelder:

a) $f(x,y) = x^3y^2 - 2y^4 + xy$

b) $f(x,y) = e^{x^2-2xy}$

**Lösung:**

a) $f(x,y) = x^3y^2 - 2y^4 + xy$

Der Gradient lautet:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 + y \\ 2x^3y - 8y^3 + x \end{pmatrix}$$

b) $f(x,y) = e^{x^2-2xy}$ Der Gradient lautet:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} (2x-2y)\cdot e^{x^2-2xy} \\ -2xe^{x^2-2xy} \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 2:** Wir betrachten die Höhenlinien der folgenden Skalarfelder:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x - y \\ g(x,y) &= x^2 - y^2\,, \end{aligned}$$

die in Abb. 1 gezeigt werden. Überlegen Sie sich, wie das Gradientenfeld eingezeichent werden muss, d.h. wohin zeigen die Gradienten in den einzelnen Punkten?

**Lösung:** Die Gradienten stehen snekrecht auf den Höhenlinien und zeigen immer in Richtung des größten Funktionsanstieg, d.h. von Höhenlinien mit einem niedrigeren Funktionswert hin zu Höhenlinien mit einem größeren Funktionswert. Die Pfeillängen werden größer, wenn die Funktion sich stärker ändert, d.h. steiler ist. Die genaue Position zeigt Abb. 2 und 3.

**Aufgabe 3:** Bestimmen Sie die Richtungsableitung des Skalarfeldes

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xy - yz^2$$

im Punkt $P = (1,2,3)$ in Richtung $\vec{v}^T = (1,1,1)$.

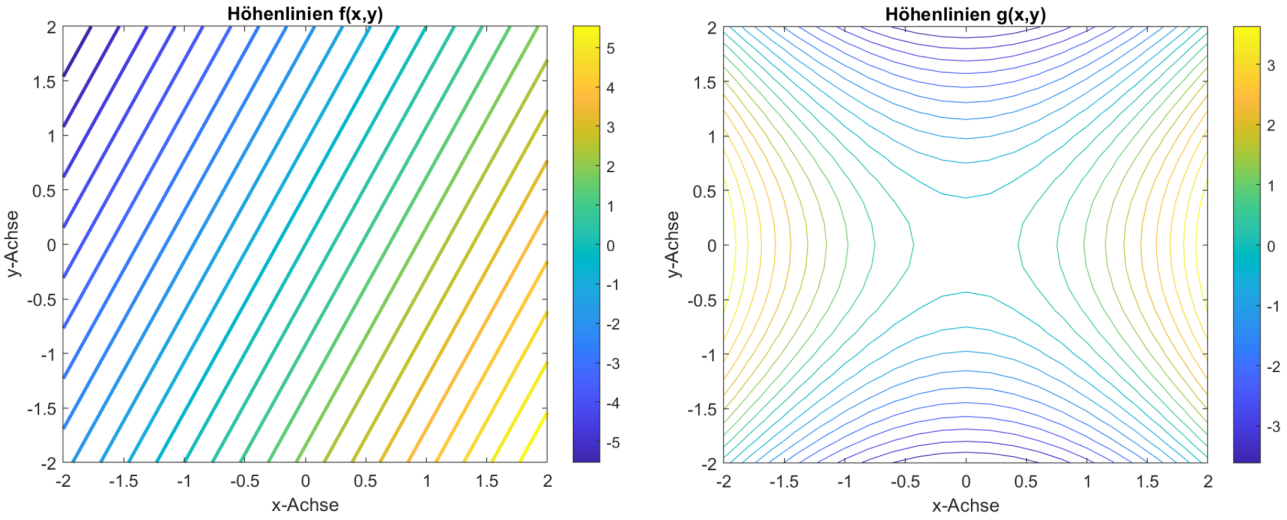



Abbildung 1: Höhenlinien zu Aufgabe 2

**Lösung:** Wir bestimmen den Gradienten:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x-z^2 \\ -2yz \end{pmatrix}$$

Wir normieren $\vec{v}$. Die Länge ist $|\vec{v}| = \sqrt{3}$. Damit erhalten wir:

$$\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1\,,\,1\,,\,1) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -12 \end{pmatrix} = -\frac{13}{\sqrt{3}}$$

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = x^3 \sin(y) + e^x y^2$$

in Richtung des Vektors $\vec{v} = (1,1)^T$ im Punkt $P = (1,0)$.

**Lösung:** Der Gradient lautet:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \sin(y) + e^x y^2 \\ x^3 \cos(y) + 2e^x y \end{pmatrix}$$

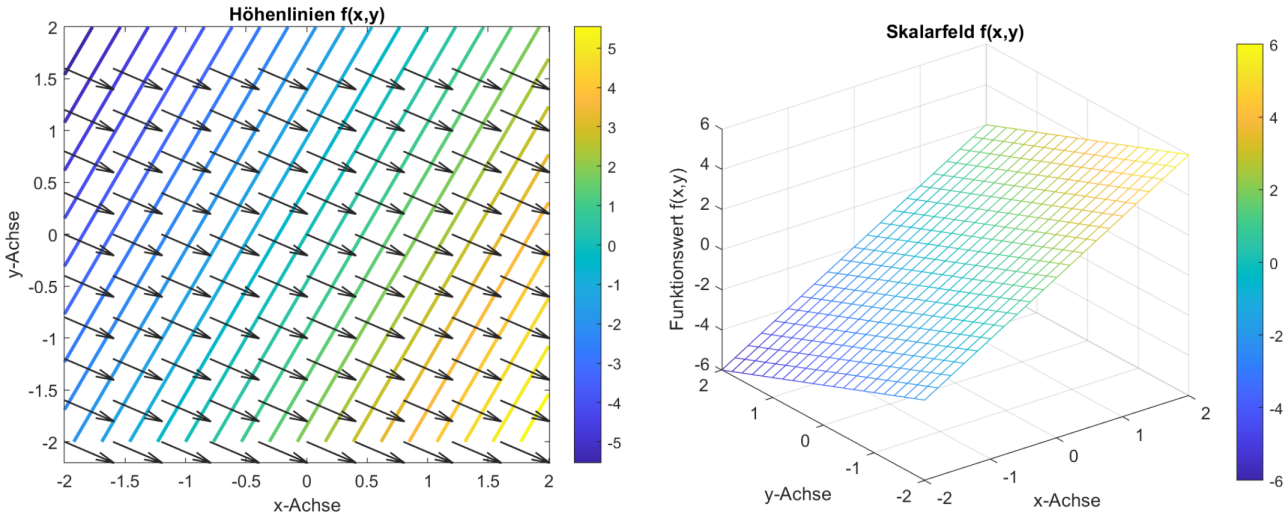



Abbildung 2: Gradienten und Funktionsverlauf für die erste Funktion zu Aufgabe 2

Ausgewertet im Punkt P erhalten wir:

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtung $\vec{v}$ ist nicht normiert, wir teilen also durch die Länge und erhalten $\vec{v}_0 = (1/\sqrt{2}\,,\, 1/\sqrt{2})^T$. Damit erhalten wir folgende Richtungsableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) &= \nabla f(1,0)) \cdot \vec{v}_0 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**Aufgabe 5:** Finden Sie alle Extrema der Funktion

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^2 - x_1^2 + x_2\,.$$

**Lösung:** Wir bestimmen zunächst den Gradienten und setzen diesen null:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1^3 - 2x_1 \\ 2x_2 + 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Als mögliche Lösungen erhalten wir die folgenden Punkte: $P_1(0, -0.5)$, $P_2(0.5, -0.5)$ und $P_3(-0.5, -0.5)$.

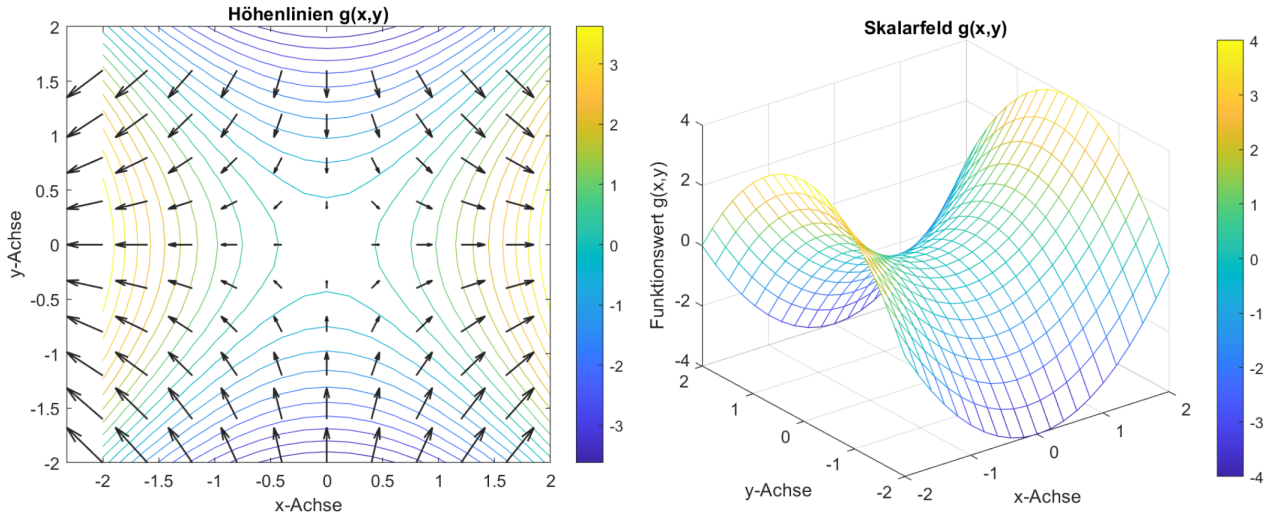



Abbildung 3: Gradienten und Funktionsverlauf für die zweite Funktion zu Aufgabe 2

Die Hesse Matrix lautet:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 24x_1^2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für $P_1$ ist die Hesse Matrix indefinit, d.h. es liegt ein Sattelpunkt vor. Für $P_2$ und $P_3$ ist die Hesse Matrix positiv definit, d.h. wir haben hier Minima.

**Aufgabe 6:** Bestimmen Sie die lokalen Maxima und Minima der folgenden Skalarfelder:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2\,.$$

**Lösung:** Es gilt

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 \\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Daher müssen wir die beiden Gleichungen

$$2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 = 0$$

lösen. Wir können in der ersten Gleichung $x_2$ und in der zweiten $x_1$ ausklammern. Dies ergibt insgesamt vier kritische Punkte aus den vier Bedingungen:

$$\begin{aligned} x_2 = 0 \quad &\text{und} \quad x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \quad &\text{und} \quad x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \\ x_1 = 0 \quad &\text{und} \quad 2x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \quad &\text{und} \quad 2x_1 + x_2 + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

Das ergibt als ersten kritischen Punkt $P_1 = (0, 0)$. Setzen wir $x_2 = 0$ in der zweiten Bedingung ein, erhalten wir $x_1 = -2$, also $P_2 = (-2, 0)$. Analog ergibt sich $P_3 = (0, -2)$. Betrachten wir nun die restlichen Ausdrücke, dann muss gelten:

$$2x_1 + x_2 + 2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 + 2x_2 + 2 = 0$$

Wir lösen die erste Gleichung nach $x_2$ auf und setzen in die zweite ein: $-2 - 3x_1 = 0$ also $x_1 = -2/3$. Verwenden wir dieses Ergebnis in der ersten Gleichung, ergibt sich $P_4 = (-2/3, -2/3)$. Die allgemeine Hesse Matrix lautet

$$H_f = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 + 2x_2 + 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2 & 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Beim ersten Punkt gilt $\det(H_f) = -4$, daher ist hier ein Sattelpunkt. Für $P_2$ erhalten wir $\det(H_f) = -4$, also einen Sattelpunkt. Analog ist $\det(H_f) = -4$ für $P_3$. Daher ist auch $P_3$ ein Sattelpunkt. Für den letzten kritischen Punkt ist $(H_f)_{11} = -4/3 < 0$ und $\det(H_f) = 4/3 > 0$, daher ist $H_f$ in $P_4$ negativ definit, woraus folgt, dass $P_4$ ein Maximum ist.

**Zusatzaufgabe 1:** Das elektrostatische Potential in der Umgebung einer negativen Punktladung, die sich im Ursprung befindet, wird beschrieben durch

$$U(\vec{x}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x}|},$$

wobei wir mit $|\vec{x}|$ den Betrag des Vektors $\vec{x} = (x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)^T$ bezeichnen. Wir betrachten einen beliebigen Punkt $P = (p_1\,,\, p_2\,,\, p_3)^T$. In welcher Richtung in $P$ nimmt das Potential am stärkste zu? Wie groß ist dieser Maximalwert?

**Lösung:** Die größte Zunahme des Potentials liegt in Richtung des Gradienten vor (bekannt aus Vorlesung/Video). Da das elektrische Feld kugelsymmetrisch zur Quelle im Ursprung ist, also radial nach außen. Für die einzelnen Komponenten gilt:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_k}{|\vec{x}|^3}.$$

Für den Punkt $P$ erhalten wir also:

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}(\vec{p}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_k}{|\vec{p}|^3}.$$

Den Maximalwert der Steigung erhalten wir, indem wir die Richtungsableitung in Richtung des Gradienten berechnen, wobei die Richtung d.h. der Gradient normiert werden muss. Wir teilen also zusätzlich das Skalarprodukt durch die Länge des Gradienten:

$$\frac{\nabla U(\vec{p})^T}{|\nabla U(\vec{p})|} \cdot \nabla U(\vec{p}) = |\nabla U(\vec{p})| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}{|\vec{p}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{p}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{p}|^2}$$

**Zusatzaufgabe 2:** Gegeben sei die Funktion:

$$f(x,y) = xy(x^2+y^3) + 2x - 3y$$

a) Berechnen Sie den Gradienten von $f$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $f$ in Richtung:

$$\vec{v}_t := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

c) Bestimmen Sie die Richtung des maximalen Anstiegs im Ursprung, d.h. bestimmen Sie das Maximum der Ableitung:

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_t},$$

bzgl. des Parameters $t$.

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus a) und c) und interpretieren Sie diese.

**Lösung:**

a) Der Gradient lautet:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y + y^4 + 2 \\ x^3 + 4xy^3 - 3 \end{pmatrix}$$

b) Der Vektor $\vec{v}_t$ ist für alle Parameter t normiert, d.h. er besitzt die Länge eins, da $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ gilt. Damit lautet die Richtungsableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_t} &= \nabla f \cdot \vec{v}_t \\ &= \begin{pmatrix} 3x^2y + y^4 + 2 \\ x^3 + 4xy^3 - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= (3x^2y + y^4 + 2)\cos(t) + (x^3 + 4xy^3 - 3)\sin(t) \end{aligned}$$

c) Wir suchen die maximale Richtungsableitung im Ursprung. Die Richtungsableitung im Ursprung lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_t}(0,0) = 2\cos(t) - 3\sin(t)$$

Wir berechnen die Ableitung bzgl. $t$:

$$\partial_t \frac{\partial f}{\partial \vec{v}_t}(0,0) = \partial_t(2\cos(t) - 3\sin(t)) = -2\sin(t) - 3\cos(t)$$

Um ein Maximum zu bestimmen setzen wir diese Ableitung gleich null und lösen nach $t$ auf:

$$0 = -2\sin(t) - 3\cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad -2\sin(t) = 3\cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \tan(t)$$

Also ist $t = \tan^{-1}(-3/2) = -0.98$. Die Richtung des maximalen Anstiegs ist also:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(-0.98) \\ \sin(-0.98) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{13}}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

d) Der Gradient im Ursprung lautet:

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Damit ist der Gradient ein Vielfaches der maximalen Richtungsableitung, was bedeutet, dass der Gradient in die Richtung des maximalen Anstiegs zeigt.