Übungen zu Mathematik I
Blatt 12

Aufgabe 1: Bestimmen Sie Stammfunktionen zu den folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$

b) $f(t) = \cos(\omega t)$

c) $f(y) = e^{-y}$

Lösung: Es werden keine speziellen Integrationsregeln wie partielle Integration oder die Substitution benötigt:

a) $\int f(x)\,dx = \int 2x^3 - 3x + 1\,dx = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x$

b) $\int f(t)\,dt = \int \cos(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)$

c) $\int f(y)\,dy = \int e^{-y}\,dy = -e^{-y}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\int x^2 \cdot (1 - \ln(x))\,dx\,.$$

Lösung: Wir multiplizieren die Klammer aus und zerlegen das Integral in zwei Teile:

$$\int x^2 \cdot (1 - \ln(x))\,dx = \int x^2 - x^2\ln(x)\,dx = \int x^2\,dx - \int x^2\ln(x)\,dx$$

Das erste Integral berechnet sich ganz normal:

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\,.$$

Für das zweite Integral wenden wir die partielle Integration an, mit $f(x) = \ln(x)$ und $g'(x) = x^2$. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int x^2\ln(x)\,dx &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \int \frac{x^3}{3x}\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3\,.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot (1 - \ln(x))\, dx &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln(x) + \frac{1}{9}x^3 \\ &= \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 \ln(x) \\ &= x^3 \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\ln(x)\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie eine Stammfunktion, indem Sie $z = 1 - e^x$ substituieren:

$$\int \frac{e^x}{1 - e^x}\, dx\,.$$

Lösung: Wir formen zuerst um:

$$\int \frac{e^x}{1 - e^x}\, dx = \int (1 - e^x)^{-1} \cdot e^x\, dx$$

Wir substituieren $z = q - e^x$, woraus $dz/dx = -e^x$ folgt. Wir erhalten also:

$$\int (1 - e^x)^{-1} \cdot e^x\, dx = -\int z^{-1}\, dz = -\ln(z) = -\ln(1 - e^x)\,.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Integrale, indem Sie eine geeignete Integrationsregel anwenden:

a) $\int 2x^3 - 5x + 3\, dx$

b) $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 2}\, dx$

c) $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\, dx$

Lösung:

a) $\int 2x^3 - 5x + 3\, dx$

Wir wenden die übliche Integrationsregel für Potenzen an und berücksichtigen die Linearität des Integrals:

$$\int 2x^3 - 5x + 3\, dx = \frac{2}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + 3x + C$$

b) $\int x \cdot \sqrt{x^2 + 2}\, dx$

Wir substituieren $z = x^2 + 2$. Damit erhalten wir

$$\frac{dz}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}dz = x\,dx$$

Setzen wir alles ins Integral ein, ergibt sich:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{3}\sqrt{z^3} = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2)^3}\,,$$

wobei im letzten Schritt resubstituiert wurde.

c) $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx$

Wir wenden die partielle Integration an und wählen:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x) \\ g'(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx = \sin(x) \cdot \sin(x) - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx\,.$$

Wir addieren auf beiden Seiten $\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx$, damit nur noch auf der linken Seite das Integral steht:

$$2\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx = \sin(x) \cdot \sin(x)\,.$$

Wir teilen durch zwei und erhalten die Lösung:

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)\,.$$

Aufgabe 5: Die Geschwindigkeit einer startenden Rakete ändere sich quadratisch mit der Zeit nach der folgenden Formel:

$$v(t) = \frac{t^2}{3}\,.$$

Die Startgeschwindigkeit zum Zeitpunkt null ist $v_0 = 0$. Die Zeitangaben sind in s und die Geschwindigkeit wird in m/s gemessen. Welche Strecke hat die Rakete nach $10\,s$, welche nach einer Minute zurückgelegt?

Lösung: Wir erhalten die Strecke aus der Geschwindigkeit, indem wir die Funktion $v(t)$ in den Grenzen 0 bis t integrieren:

$$s(t) = \int_0^t \frac{\tau^2}{3}\,d\tau = \left.\frac{\tau^3}{9}\right|_0^t = \frac{t^3}{9}\,.$$

Wir erhalten die gesuchten Strecken durch Einsetzen:

$$s(10) = \frac{10^3}{9} = \frac{1000}{9} \approx 111,11\,\mathrm{m} \quad \text{und} \quad s(60) = \frac{60^3}{9} = \frac{21600}{9} = 24.000\,\mathrm{m}\,.$$