Übungen zu Mathematik I
Blatt 13

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve im angegebenen Intervall:

a) $f(x) = x^3 - 4x$ zwischen den Nullstellen

b) $f(x) = (1 + e^x)^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$

Lösung:

a) $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, damit ergeben sich die Nullstellen $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$. Wir intergrieren daher wie folgt:

$$\left| \int_{-2}^{0} x^3 - 4x \, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} x^3 - 4x \, dx \right| = 4 + |-4| = 8$$

Es hätte aus Symmetriegründen auch ausgerecht nur ein Integral zu berechnen. Die Gesamtfläche hätte sich dann durch Verdoppeln ergeben.

b) Die Funktion liegt immer über der x-Achse. Wir erhalten daher:

$$\int_{0}^{1} (1+e^x)^2 \, dx = \int 1 + 2e^x + e^{2x} \, dx = x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(-3 + 4e + e^2\right) \approx 7.6311$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Fläche zwischen den beiden Kurven:

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3 - 4x\,.$$

Lösung: Wir bestimmen zuerst die Schnittpunkte der Kurven:

$$x^2 - 4 = x^3 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad x = -2\,, \quad x = 1 \quad \text{und} \quad x = 2\,.$$

Wir berechnen also zwei Integrale:

$$\left| \int_{-2}^{1} x^2 - 4 - x^3 + 4x \, dx \right| + \left| \int_{2}^{2} x^2 - 4 - x^3 + 4x \, dx \right| = \left| -\frac{45}{4} \right| + \frac{7}{12} = \frac{142}{12}$$

Aufgabe 3: Wir wollen die Energiemenge in kWh bestimmen, die eine Solaranalge an einem Sommertag erbringt. Dazu wurde die Direkteinstrahlung in W/m^2 an einem warmen Augusttag im Abstand von 2h während der Sonneneinstrahlung gemessen. Die Messdaten zeigt Abb. 1. Unsere Solaranlage besteht aus 5 Modulen, mit einer Fläche von je $1,28\,m^2$.

a) Wir approximieren die Fläche unter der Messkruve indem wir die Messergebnisse summieren und mit dem Zeitabstand von $2h$ multiplizieren. Bestimmen Sie mit dieser Methode die erbrachten kWh.

b) Die Messkrurve kann durch eine Parabel approximiert werden:

$$f(t) = -11t^2 + 270t - 1351\,.$$

Bestimmen Sie erneut die erbrachten kWh, indem Sie nun die approximierte Parabel verwenden.

Stunden h	7	9	11	13	15	17
Direkteinstrahlung in W/m^2	28,098	123,051	293,698	301,260	260,000	34,386

Abbildung 1: Messwerte zur Direkteinstrahlung in Aufgabe 3

Lösung:

a) Die Summe der Messwerte beträgt: $1040,493\,W/m^2$. Wir multiplizieren diesen Wert mit der Zeitdifferenz von $2h$, die zwischen den einzelnen Messungen liegt und erhalten: $2080,986\,Wh/m^2$. Die Fläche der Solaranlage beträgt: $5 \cdot 1,28 = 6,4\,m^2$. Multiplizieren wir diesen Wert mit $2080,986\,Wh/m^2$ erhalten wir die erbrachte Leistung: $13.318,31Wh$, was $13,3\,kWh$ entspricht.

b) Wir bestimmen die Fläche unter der Kurve, indem wir das Integral von 7 bis 17 berechnen:

$$\int_7^{17} -11t^2 + 270t - 1351\,dt = \frac{6400}{3} \approx 2133,3\,Wh/m^2\,.$$

Auch diesen Wert multiplizieren wir mit der Fläche der Anlage, was $13.653,12\,Wh$ ergibt. Umgerechnet sind das $13,7\,kWh$.

Aufgabe 4: Ein Heliumballon startet am Erdboden senkrecht nach oben. Seine Geschwindigkeit lässt sich durch die Funktion $v(t)$ beschreiben:

$$v(t) = \frac{10}{t^2 + 2t + 1}\,.$$

Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden nach dem Start zur Zeit $t = 0$ und $v(t)$ wird in km/h angegeben.

a) Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Ballon zu Beginn?

b) Zeigen Sie, dass sich der Ballon stets aufwärts bewegt.

c) Welche Höhe kann der Ballon maximal erreichen?

d) Wie lange dauert es, bis der Ballon die Hälfte der maximalen Höhe erreicht hat? Welche Geschwindigkeit hat er zu diesem Zeitpunkt?

Hinweis: Es könnte nützlich sein, den Nenner mit Hilfe der binomischen Formel zusammenzufassen.

Lösung:

a) $v(0) = 10$ km/h

b) Wir wenden die zweite binomische Formel auf den Nenner an und erhalten:

$$v(t) = \frac{10}{t^2 + 2t + 1} = \frac{10}{(t+1)^2}\,.$$

Jetzt ist klar, dass sowohl Zähler als auch Nenner immer positiv sind, d.h. es gilt $v(t) > 0$, sodass die Bewegung immer aufwärts erfolgt und nicht abwärts (negative Geschwindigkeit).

c) Um die Höhe $h(t)$ zu erhalten, müssen wir integrieren:

$$h(t) = \int_0^t \frac{10}{(\tau+1)^2}\,d\tau = -\frac{10}{(\tau+1)}\bigg|_0^t = -\frac{10}{(t+1)} + 10\,.$$

Die maximale Höhe erhalten wir über den Grenzwert, d.h. wir berechnen das uneigentliche Integral:

$$h_\infty = \lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{10}{(\tau+1)^2}\,d\tau = \lim_{t\to\infty} -\frac{10}{(t+1)} + 10 = 10$$

d.h. die maximale Höhe beträgt 10 km.

d) Wir suchen die Zeit t, zu der $h(t) = 5$ ist. d.h. wir lösen auf:

$$-\frac{10}{(t+1)} + 10 = 5 \quad \Rightarrow \quad t = 1\,,$$

d.h. nach einer Stunde erreicht der Ballon die halbe Höhe von 5 km. Die Geschwindigkeit beträgt dann $v(1) = 2.5$ km/h.

Aufgabe 5: Wir interessieren uns für das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn wir die Funktion

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

im Bereich $[2, \infty)$ um die x-Achse rotieren lassen. Entsteht ein endliches Volumen? Wenn ja, wie groß ist es?

Lösung: Wir berechnen das uneigentliche Integral, welche das Rotationsvolumen liefert:

$$V = \lim_{b\to\infty} \pi \int_2^b \left(-\frac{2}{x}\right)^2 dx = \pi \lim_{b\to\infty} -\frac{4}{x}\Big|_2^b = \pi \cdot \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{4}{b} + 2\right) = 2\pi\,.$$

Da das uneigentliche Integral existiert, entsteht ein endliches Volumen der Größe 2π.