Übungen zu Mathematik I
Blatt 14

Aufgabe 1: Bestimmen Sie eine Stammfunktion für die folgenden Mehrfachintegrale:

a) $\iint x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^3 \, dx_1 \, dx_2$

b) $\iiint x \cdot y \cdot e^z \, dx \, dy \, dz$

Lösung:

a) Wir berechnen nacheinander:

$$\begin{aligned} \iint x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^3 \, dx_1 \, dx_2 &= \int \frac{1}{3}x_1^3 + 2x_1^2x_2 - x_2^3x_1 \, dx_2 \\ &= \frac{1}{3}x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 - \frac{1}{4}x_2^4x_1 \end{aligned}$$

b) Wir berechnen nacheinander:

$$\begin{aligned} \iiint x \cdot y \cdot e^z \, dx \, dy \, dz &= \iint \frac{1}{2}x^2ye^z \, dy \, dz \\ &= \int \frac{1}{4}x^2y^2e^z \, dy \, dz \\ &= \frac{1}{4}x^2y^2e^z \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Mehrfachintegrale:

a) $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x \cdot y \cdot z \, dx \, dy \, dz$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x \cdot y \cdot z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{y \cdot z}{2} \, dy \, dz \\ &= \int_0^3 z \, dz \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta &= \int_0^{2\pi} 2\cos(\vartheta) \, d\vartheta \\ &= 0\end{aligned}$$

Das zweite Integral muss nicht berechnet werden, da die Integration über die volle Periode bei Sinus und Cosinus immer null ergibt.

Aufgabe 3: Wir betrachten den elektrisch geladenen Einheitswürfel $[0,1]^3$ (Einheit in Meter). Die Ladung sei linear verteilt und wird durch die folgende Ladungsdichte (in Coulomb pro Quadratmeter) beschrieben:

$$\rho(x, y, z) = 2x + y - 3z \, .$$

Wie groß ist die Gesamtladung im Würfel?

Lösung: Das Volumenintegrale (Dreifachintegral) über den Würfel liefert die Gesamtladung:

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x + y - 3z \, dx \, dy \, dz \, .$$

Da der Integrand stetig ist, spielt die Intergrationsreihenfolge keine Rolle. Wir erhalten:

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x + y - 3z \, dx \, dy \, dz = 0 \, ,$$

d.h. der Würfel ist insgesamt gesehen elektrisch neutral, da sich positive und negative Ladungen aufheben.