Übungen zu Mathematik III
Blatt 1

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Skalarfelder im angegebenen Punkt P in Richtung v:

a) $f(x,y) = x^2y + y^3$, $P = (1,1)$, $v = (1,-1)^T$.

b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2e^{2x_3}$, $P = (1,-1,0)$, $v = (1,1,1)^T$.

Lösung:

a) Der Gradient lautet:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 3y^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die normierte Richtung ist: $v_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$. Damit erhalten wir die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial v_0} = \nabla f(1,1) \cdot v_0 = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\,.$$

b) Der Gradient lautet:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x_2e^{2x_3} \\ x_1e^{2x_3} \\ 2x_1x_2e^{2x_3} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1,-1,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die normierte Richtung ist: $v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$. Damit erhalten wir die Richtungsableitung:

$$\frac{\partial f(1,-1,0)}{\partial v_0} = \nabla f(1,-1,0) \cdot v_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Aufgabe 2: Wir betrachten ein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Der zugehörigen Höhenlinienplot wird in Abb. **??** gezeigt. Skizzieren Sie schematisch die Gradienten in den drei eingezeichneten Punkten. Auf was müssen Sie achten?

Lösung: Der Gradient steht immer senkrecht auf den Höhenlinien. Weiterhin zeigt er in Richtung des steilsten Anstieges, d.h. von tiefen Funktionswerten in Richtung größerer Funktionswerte. Die Pfeile in Abb. **??** zeigen schematisch die Richtung der Gradienten.

Aufgabe 3: Wir betrachten den Ortsvektor $\vec{r}$ in der Ebene und im Raum:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\,.$$

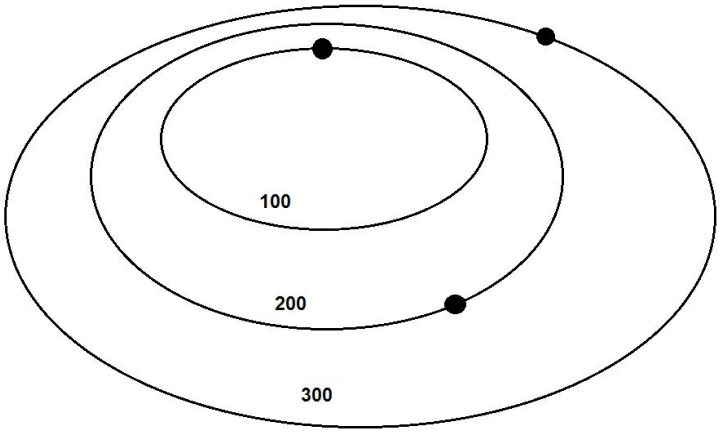


Abbildung 1: Höhenlinien für Aufgabe 2.

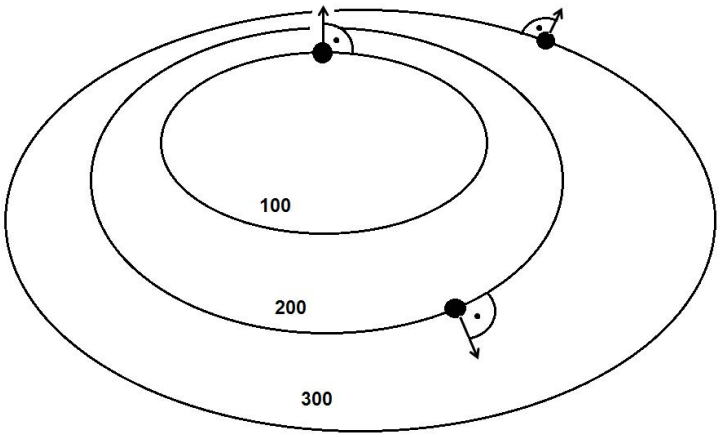


Abbildung 2: Lösung zur Aufgabe 2.

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den 2D Fall.

b) Welches Ergebnis erwarten Sie für die Divergenz von $\vec{r}$ auf Grund ihre Skizze?

c) Berechnen Sie die Divergenz und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Vermutung.

d) Welches Ergebnis erwarten Sie für die Rotation von $\vec{r}$?

e) Berechnen Sie die Rotation und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Vermutung.

Lösung:

a) Abb. **??** zeigt das Vektorfeld. Die Vektorfeile gehen radial vom Ursprung aus. Die Pfeillänge nimmt mit größerem Abstand zum Ursprung zu.

b) An der Skizze sehen wir, dass die Vektorpfeile nach außen hin immer größer werden, d.h. wenn wir uns ein Kontrollvolumen vorstellen, fließt mehr heraus als hinein fließt, daher erwarten wir eine positive Divergenz.

c) Wir berechnen:

$$\operatorname{div} \vec{r} = \partial_{x_1} x_1 + \partial_{x_2} x_2 + \partial_{x_3} x_3 = 1 + 1 + 1 = 3\,.$$

Hinweis: Allgemein gilt für $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ Folgendes: $\operatorname{div} \vec{r} = n$.

d) An der Skizze sehen wir, dass die Vektorpfeile symmetrisch angeordnet sind. Stellen wir uns ein Wasserrad vor und fassen das Vektorfeld als Strömung auf, sind die Vektorpfeile links und rechts gleich groß, daher dreht sich das Wasserrad nicht. Wir erwarten also, dass die Rotation des Vektorfeldes verschwindet.

e) Es gilt (wenn wir um eine verschwindende dritte Komponente ergänzen):

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 - \partial_{x_3} x_2 \\ \partial_{x_3} x_1 - 0 \\ \partial_{x_1} x_2 - \partial_{x_2} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} x_3 - \partial_{x_3} x_2 \\ \partial_{x_3} x_1 - \partial_{x_1} x_3 \\ \partial_{x_1} x_2 - \partial_{x_2} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Wo besitzt das folgende Vektorfeld Quellen und Senken? Wo ist es quellfrei?

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

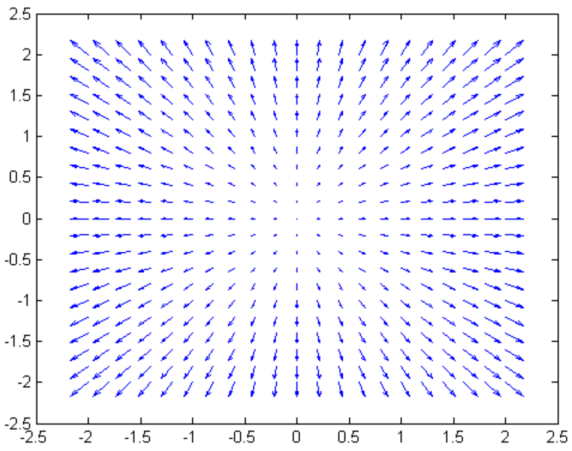


Abbildung 3: Vektorfeld zu Aufgabe 3.

Lösung: Wir berechnen zunächst die Divergenz:

$$\mathrm{div}\vec{F}(x_1, x_2) = \partial_{x_1} x_1 x_2^2 + \partial_{x_1} 2x_2 = x_2^2 + 2$$

Um festzustellen, ob das Vektorfeld Quellen oder Senken besitzt, analysieren wir das Vorzeichen der Divergenz. Wir finden, dass $x_2^2 + 2 >$ für alle Punkte $(x_1\,,\, x_2)$. Daher besitzt das Vektorfeld überall Quellen.

Aufgabe 5: Abbildung **??** zeigt eine dünne, homogene Scheibe, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega_0 \cdot \vec{e}_3$ um die Symmetrieachse (x_3-Achse) rotiert.

Betrachten wir ein beliebiges Teilchen mit Ortsvektor $\vec{r}$ auf der Scheibe, so besitzt dieses den Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\omega_0 x_2 \\ \omega_0 x_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass dieses ebene Geschwindigkeitsfeld ein Wirbelfeld ist, indem Sie die Rotation ausrechnen und nachweisen, dass diese nicht verschwindet. Betrachten Sie dazu auch den Plot des Geschwindigkeitsfeldes. Was würden Sie erwarten wenn Sie ein Wasserrad in diesem Vektorfeld positionieren?

Lösung: Für die Rotation erhalten wir Folgendes:

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{\omega}\,.$$

Die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes stimmt also mit der Winkelgeschwindigkeit überein, was wir auch erwarten konnten, wenn wir an die kleinen Wasserräder denken. Diese drehen sich gegen den Uhrzeigersinn, sodass nach der Rechten-Hand-Regel die Rotation mit der Drehachse, d.h. der Winkelgeschwindigkeit übereinstimmt.

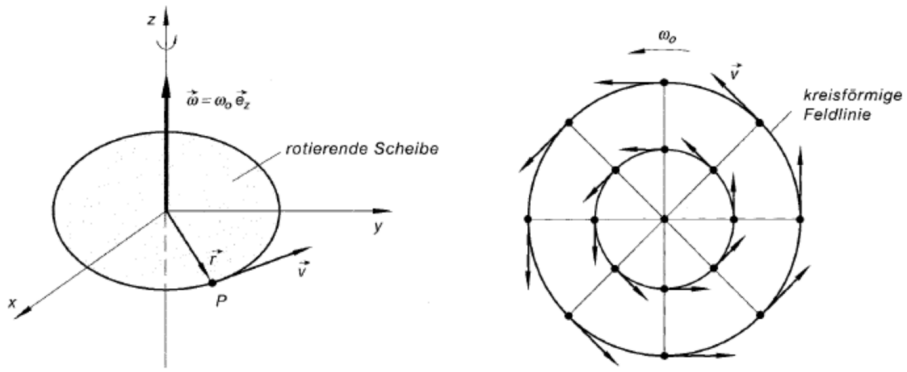


Abbildung 4: Rotierende Scheibe (links) und zugehöriges Geschwindigkeitsfeld (rechte) zu Aufgabe 5.