Übungen zu Mathematik III
Blatt 2

Aufgabe 1: Wir betrachten das elektrische Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius $R > 0$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{r}| \leq R$$

Bestimmen Sie die Divergenz dieses kugelsymmetrischen Vektorfeldes. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der entsprechenden Maxwell Gleichung, indem Sie die Ladungsdichte

$$\rho = \frac{\text{Ladung}}{\text{Volumen}}$$

verwenden.

Lösung: Wir verwenden folgendes Ergebnis: $\operatorname{div} \vec{r} = 3$ und erhalten:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \operatorname{div} \vec{r} = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\,.$$

Für die Ladungsdichte gilt, wenn wir die Ladung Q und das Volumen $4/3\pi R^3$ einsetzen:

$$\rho = \frac{Q}{4/3\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\,.$$

Damit erhalten wir für die Divergenz des elektrischen Feldes:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

was mit der entsprechenden Maxwell Gleichung übereinstimmt.

Aufgabe 2: Wir betrachten das elektrische Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius $R > 0$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad |\vec{r}| \leq R$$

Bestimmen Sie die Rotation dieses kugelsymmetrischen Vektrofeldes. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der entsprechenden Maxwell Gleichung der Elektrostatik.

Lösung: Wir verwenden das Ergebnis $\operatorname{div} \vec{r} = \vec{0}$ und erhalten:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}\,.$$

Dies stimmt mit der entsprechenden Maxwell Gleichung überein. In der Elektrostatik gibt es kein elektrisches Wirbelfeld.

Aufgabe 3: Wir betrachten das 2D Geschwindigkeitsfeld einer Strömung:

$$\vec{v}(x,y) = \frac{v_0}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichnet v_0 den konstanten Betrag der Geschwidnigkeit. Das Strömungsfeld wird in Abb. 1 gezeigt.

a) Entscheiden Sie an Hand von Abb. 1, ob die Divergenz von $\vec{v}$ größer als null, kleiner als null oder gleich null ist.

b) Berechnen Sie die Divergenz und verifizieren Sie ihr Ergebnis.

Lösung:

a) Wir denken uns ein Quadrat im Strömungsfeld und betrachten die hinein- und herausfließenden Strömungspfeile. Wir finden zu jedem hineinfließenden Pfeil einen entsprechenden herausfließenden Pfeil mit der gleichen Länge, daher verschwindet die Divergenz, weil das Feld quellfrei ist.

b) Wir berechnen:

$$\operatorname{div} \vec{v}(x,y) = v_0 \left(xy(x^2+y^2)^{3/2} - xy(x^2+y^2)^{3/2} \right) = 0$$

Aufgabe 4: Wir betrachten das 2D Geschwindigkeitsfeld einer Strömung:

$$\vec{v}(x,y) = \frac{v_0}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichnet v_0 den konstanten Betrag der Geschwidnigkeit. Das Strömungsfeld wird in Abb. 2 gezeigt.

a) Entscheiden Sie an Hand von Abb. 2, ob die Rotation von $\vec{v}$ verschwindet oder ungleich null ist.

b) Berechnen Sie die Rotation und verifizieren Sie ihr Ergebnis.

Lösung:

a) Wir denken uns ein Wasserrad in der Strömung und überlegen, ob sich das Rad dreht oder nicht. Da die Pfeile links und rechts von dem Wasserrad symmetrisch sind, dreht sich das Wasserrad nicht. Daher ist die Rotation null.

b) Da eine ebenes (2D) Vektorfeld vorliegt, müssen wir eine null in der dritten Komponente ergänzen. Weiter verschwinden die x und y Koordinate. Daher berechnen wir nur die z Koordinate:

$$(\mathrm{rot}\,\vec{v}(x,y))_z = v_0\left(xy(x^2+y^2)^{3/2} + xy(x^2+y^2)^{3/2}\right) = 0$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie die Divergenz und Rotation des folgenden Vektorfeldes:

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 + x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Kann $\vec{F}$ als Wirbelfeld geschrieben werden, d.h. existiert ein Vektorfeld $\vec{E}$ mit $\vec{F} = \mathrm{rot}\vec{E}$? Oder existiert ein Potenzial φ mit $\vec{F} = \nabla\varphi$? Wo besitzt das Vektorfeld Quellen und Senken, wo ist es quellfrei?

Lösung: Es gilt:

$$\mathrm{div}\vec{F} = 2x_2 \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\vec{=}0\,.$$

Da das Feld wirbelfrei ist, existiert ein Potenzial. In diesem Fall wäre z.B:

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_3x_2$$

ein solches Potenzial. Wenn wir den Gradienten von φ bestimmen erhalten wir $\vec{F}$. Betrachten wir die Divergenz, stellen wir fest, dass der Ausdruck nur von x_2 abhängt. Er ist für $x_2 > 0$ positiv, d.h. in diesem Fall liegt eine Quelle vor. Für $x_2 < 0$ liegt demnach eine Senke vor und bei $x_2 = 0$ ist das Feld quellfrei.

Aufgabe 6: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld und $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Wir nehmen an, dass die Funktionen zusammen mit allen partiellen Ableitungen stetig sind. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten, indem Sie die Ausdrücke berechnen:

a) $\mathrm{rot}\,\nabla f = \vec{0}$

b) $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$

Lösung:

a) Es gilt:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3} f \end{pmatrix}$$

Wenden wir darauf die Rotation an ergibt sich:

$$\text{rot} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \\ \partial_{x_3} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2 x_3} f - \partial_{x_3 x_2} f \\ \partial_{x_3 x_1} f - \partial_{x_1 x_3} f \\ \partial_{x_1 x_2} f - \partial_{x_2 x_1} f \end{pmatrix}$$

Da das Vektorfeld und alle partiellen Ableitungen stetig sind, können wir nach Schwarz die Differentiationsreihenfolge tauschen, also verschwinden alle Ausdrücke und somit erhalten wir den Nullvektor.

b) Wir erhalten:

$$\text{rot}\, \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix}$$

Von diesem Ausdruck bestimmen wir die Divergenz:

$$\text{div} \begin{pmatrix} \partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2 \\ \partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3 \\ \partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1 \end{pmatrix} = \partial_{x_1} (\partial_{x_2} F_3 - \partial_{x_3} F_2) + \partial_{x_2} (\partial_{x_3} F_1 - \partial_{x_1} F_3) + \partial_{x_3} (\partial_{x_1} F_2 - \partial_{x_2} F_1)$$

Wieder durch Anwenden des Satzes von Schwarz, d.h. Vertauschen der Differentiationsreihenfolge, heben sich die einzelnen Ausdruck weg und wir erhalten null.

Zusatzaufgabe 7: Wir betrachten die sogenannte Laplace-Gleichung im $\mathbb{R}^m$ für $m = 2, 3$, die z.B. in der Elektrostatik das elektrische Potential oder in der Thermodynamik stationäre Wärmeverteilungen beschreibt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{bzw.} \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Lösungen der Laplace-Gleichung sind, indem Sie die Funktionen zweimal ableiten und oben in die partielle Differentialgleichung einsetzen.

Lösung: Wir berechnen die ersten und zweiten partiellen Ableitungen:

$$\partial_x f = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \partial_y f = \frac{2y}{x^2+y^2}$$
$$\partial_{xx} f = -\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \partial_{yy} f = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Also erfüllt f die Laplace Gleichung in zwei Dimensionen.

3D: Wir berechnen die ersten und zweiten partiellen Ableitungen:

$$\partial_x f = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,,\ \partial_y f = \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad \partial_z f = \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$\partial_{xx} f = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,,\ \partial_{yy} f = \frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{und} \quad \partial_{zz} f = \frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\,.$$

Also ergibt die Summe der zweiten Ableitungen null und damit liegt eine Lösung vor.

Zusatzaufgabe 8: Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien zweimal stetig differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt. Wie können wir diese Lösung physikalisch interpretieren? Welche Bedeutung hat der Parameter c?

Lösung: Wir wenden die Kettenregel an und erhalten

$$\partial_x u(x,t) = f'(x+ct) + g'(x-ct)\,,\ \partial_t u(x,t) = cf'(x+ct) - cg'(x-ct)$$
$$\partial_{xx} u(x,t) = f''(x+ct) + g''(x-ct)\,,\ \partial_{tt} u(x,t) = c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct)\,,$$

wobei wir mit f', f'', g' und g'' die üblichen Ableitungen im Eindimensionalen bezeichnen. Wir sehen, dass u die Wellengleichung erfüllt. Der erste Summand steht für eine nach links laufende Welle und der zweite Summand für eine nach rechts laufende Welle. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird durch c gegeben. Hierbei ändert sich die Form der Wellen (Funktionen f und g nicht.

Als Beispiel zeigt Abb. 3 die Welle

$$u(x,t) = e^{-(x+ct)^2} + e^{-(x-ct)^2}\,,$$

zu unterschiedlichen Zeitpunkten (Farben), d.h. zwei auseinander laufende Gauß'sche Glockenkurven.

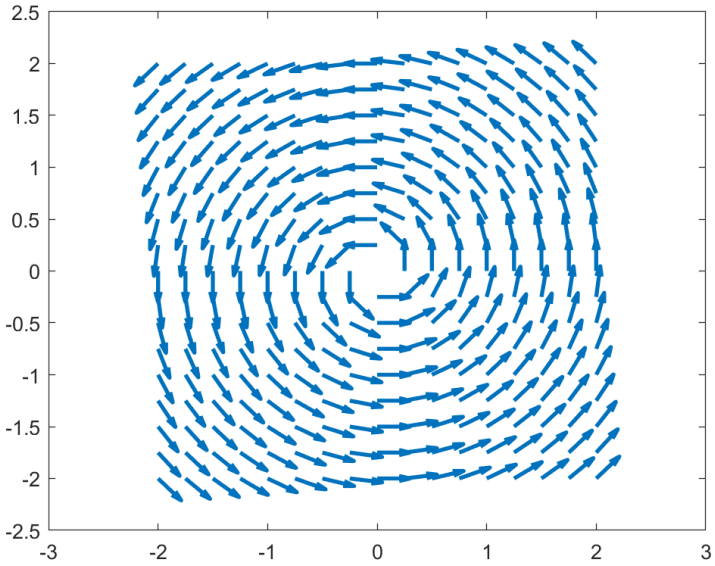


Abbildung 1: Strömungsfeld zu Aufgabe 3.

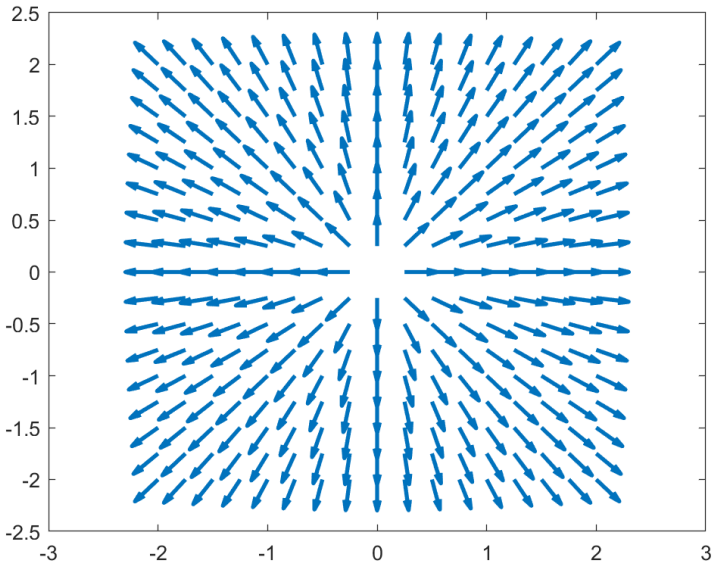


Abbildung 2: Strömungsfeld zu Aufgabe 4.

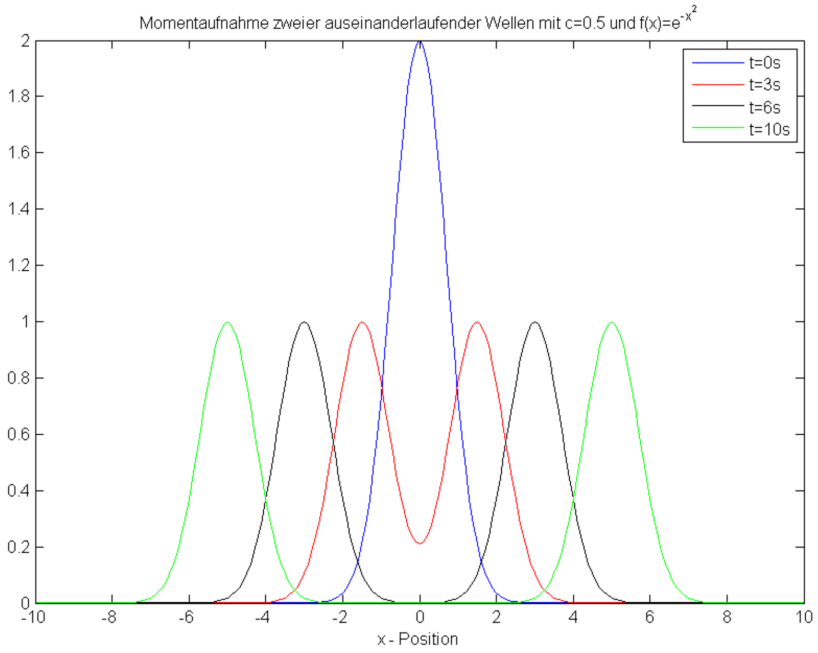


Abbildung 3: Welle zu Aufgabe 8.