Übungen zu Mathematik III
Blatt 3

Aufgabe 1: Geben Sie für die folgenden Kurven jeweils eine Parametrisierung, den Parameterbereich und den Tangentenvektor an:

a) Parabel mit der Gleichung $y = 4x^2$, $x > 0$.

b) Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung, Radius R, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

c) Kreis mit Mittelpunkt $M = (1, 2)$, Radius $r = 2$, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird.

d) Gerade durch den Ursprung mit der Steigung m.

Lösung:

a)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4t^2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0\,, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 8t \end{pmatrix}$$

b)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ -R\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ -R\cos(t) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Wir können z.B. die üblich Parametrisierung für einen Gegenuhrzeigerumlaufsinn verwenden und setzen dann für $t \leftarrow -t$.

c)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2\cos(t) \\ 2 + 2\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}$$

d)

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]\,, \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass ein Wegintegral zum Kraftfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

wegunabhängig ist. Welche mathematisch und physikalische Bedeutung hat diese Eigenschaft?

Lösung: Erweitern wir $\vec{F}$ um eine x_3 Komponente, die null ist, erhalten wir $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, d.h. es liegt ein konservatives Kraftfeld vor. Daher ist das Wegintegral wegunabhängig.

Mathematisch bedeutet dies, dass wir über einen beliebigen Weg von A nach B integrieren können. Der Wert des Integrals hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt aber nicht vom Weg ab. Physikalisch können wir das Wegintegral als geleistete Arbeit interpretieren. Daher hängt die geleistete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, aber nicht vom gewählten Weg. Wir können ein Potential einführen.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Arbeit, die Sie leisten müssen, wenn Sie im Kraftfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

auf dem in Abb. 3 eingezeichneten Weg von $A = (1, 1)$ nach $B = (3, 0)$ laufen.

Lösung: Erweitern wir $\vec{F}$ um eine x_3 Komponente, die null ist, erhalten wir $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, d.h. es liegt ein konservatives Kraftfeld vor. Daher ist das Wegintegral wegunabhängig. Wir wählen deshalb einen einfacheren Integrationsweg (vgl. Abb. 2). Wir unterteilen den Weg in die Gerade Γ_1 von A nach $C = (1, 0)$ und Γ_2 von C nach B. Da Γ_2 entlang der Äquipotenziallinien verläuft, ist das Wegintegral über diesen Weg null. Wir parametrisieren Γ_1 indem wir die Geradengleichung aufstellen:

$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wobei $t \in [0, 1]$. Damit ergibt sich für die gesuchte Arbeit:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \vec{F}(x_1, x_2) \cdot dx &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -1 + t\, dt = -t + \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^1 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Wir betrachten das folgende Vektorfeld:

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -2x_2x_3 \\ 3x_1x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Potential und überprüfen Sie anschließend, indem Sie den Gradienten des ermittelten Potentials berechnen, ob dieses Potential korrekt ist.

Lösung: Wir integrieren die k-te Komponente bzgl. x_k:

$$\begin{aligned} \int -2x_2x_3\, dx_1 &= -2x_1x_2x_3 \\ \int 3x_1x_3\, dx_2 &= 3x_1x_2x_3 \\ \int 0\, dx_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten also das Potential:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2x_3 + 3x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3$$

Bilden wir den Gradienten von Φ, erhalten wir jedoch:

$$\nabla\Phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{F}\,,$$

d.h. das Potential ist nicht korrekt. Dies ist einleuchtend, denn bestimmen wir die Rotation von $\vec{F}$, stellen wir fest, dass diese nicht verschwindet. Daher besitzt $\vec{F}$ kein Potential.

Aufgabe 5: Wir betrachten das folgende Vektorfeld:

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix}$$

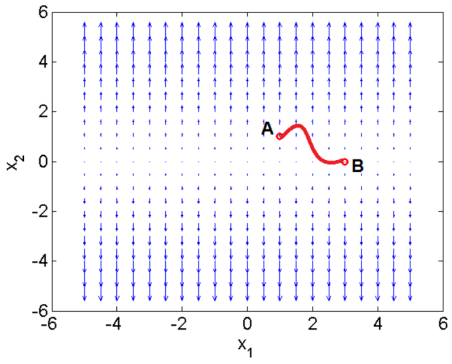


Abbildung 1: Vorgegebener Weg zu Aufgabe 3.

Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ ein Potential besitzt und bestimmen Sie dieses bzgl. des Ursprungs. Überprüfen Sie ihre Rechnung, indem Sie den Gradienten bilden.

Lösung: Wir erweitern das Vektorfeld um eine dritte Komponenten, die verschwindet und berechnen die Rotation. Da diese verschwindet, existiert ein Potential.

Wir integrieren die k-te Komponente bzgl. x_k:

$$\begin{aligned} \int x_2 \, dx_1 &= x_1 x_2 \\ \int x_1 + 1 \, dx_2 &= x_1 x_2 + x_2 \, . \end{aligned}$$

Wir erhalten also das Potential:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2$$

Bilden wir den Gradienten von Φ, erhalten wir:

$$\nabla \Phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + 1 \end{pmatrix} = \vec{F} \, .$$

Aufgabe 6: Wir betrachten das Vektorfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ konservativ ist.

b) Wir wollen überprüfen, dass das Wegintegral über geschlossene Kurven verschwindet. Integrieren Sie daher $\vec{F}$ über den Einheitskreis.

c) Bestimmen Sie das zugehörige Potential.

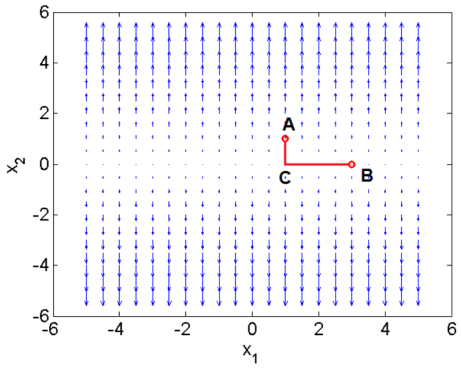


Abbildung 2: Gewählter Weg zu Aufgabe 3.

d) Integrieren Sie das Vektorfeld über die Ellipse mit der folgenden Parametrisierung:

$$\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Hinweis: Das folgende Integral könnte nützlich sein:

$$\int \cos\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2}\cos^2\varphi .$$

Lösung:

a) Erweitern wir $\vec{F}$ um eine x_3 Komponente, die null ist, erhalten wir $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, woraus folgt, dass das Vektorfeld konservativ ist.

b) Die Parametrisierung lautet:

$$\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \gamma'(\varphi) := \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Damit erhalten wir folgendes Integral:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{-\cos\varphi \, \sin\varphi + \cos\varphi \, \sin\varphi}_{=0} \, d\varphi = 0$$

c) Wir integrieren wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}\Phi = x_1 \quad &\Rightarrow \quad \Phi = \frac{1}{2}x_1^2 \\ \partial_{x_2}\Phi = x_2 \quad &\Rightarrow \quad \Phi = \frac{1}{2}x_2^2 . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + C .$$

d) Der Tangentialvektor lautet:

$$\gamma'(t) := \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

Damit erhalten wir folgendes Wegintegral:

$$\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{x} \;=\; \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 2\sin(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ 2\cos(\varphi) \end{pmatrix} d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} -\cos\varphi\,\sin\varphi + 4\cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi \\
&= 3\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi \\
&= -\frac{3}{2}\cos^2\varphi\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: Wir betrachten das konservative Vektorfeld

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen das Wegintegral vom Urspung bis zum Punkt $A = (1\,,\,0)$ auf unterschiedlichen Wegen bestimmen:

a) Die logarithmische Spirale vom Ursprung bis A (vgl. Abb. 3), die parametrisiert wird durch:

$$\gamma(\varphi) := e^{\varphi}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [-\infty, 0]\,.$$

b) Die Gerade vom Ursprung bis A.

Hinweis: Das folgende Integral könnte nützlich sein:

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}e^x\,(\cos x + \sin x)\,.$$

Lösung:

a) Der Tangentenvektor lautet:

$$\gamma(\varphi) := e^{\varphi}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + e^{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dx} &= \int_{-\infty}^{0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left\{ e^{\varphi}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} + e^{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\} d\varphi \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{\varphi}\cos\varphi - e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\sin\varphi + e^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi
\end{aligned}
$$

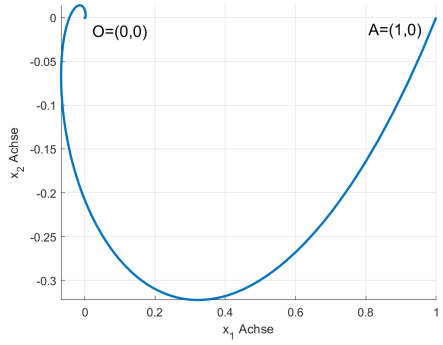


Abbildung 3: Vorgegebener Weg (log. Spirale) zu Aufgabe 7.

$$
\begin{aligned}
&= 2 \int_{-\infty}^{0} e^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi \\
&= e^{\varphi} \left(\cos\varphi + \sin\varphi\right)\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= 1 \, .
\end{aligned}
$$

b) Wir parametrisieren die Gerade und leiten die Parametrisierung ab:

$$
\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma'(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda \in [0,1] \, .
$$

Damit erhalten wir das Integral:

$$
\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{dx} = \int_{0}^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = \int_{0}^{1} 1 \, d\varphi = 1 \, .
$$