Übungen zu Mathematik III
Blatt 4

Aufgabe 1: Bei einem mathematischen Pendel mit der Länge ℓ kann (für kleine Auslenkungen) die Schwingungszeit T durch die Formel

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

berechnet werden.

a) Es sei $g \approx 9.81\text{ms}^{-2}$. Auf wie viel Prozent genau kann man die Schwingungsdauer T angeben, wenn man die Pendellänge auf 1% genau bestimmt?

b) Die Pendellänge sei nun $\ell = 1$ m. Es soll die Erdbeschleunigung g mit einer Genauigkeit von $\Delta g = 0.5 \cdot 10^{-5}$ exakt bestimmt werden. Wie genau muss dann die Angabe der Schwingungsdauer T wenigstens sein?

Lösung:

a) Die Abhängigkeit von T und l wird gegeben durch die Funktion:

$$T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad T'(l) = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{l}{g}g}}\,.$$

Da nach der prozentualen Abweichung gefragt ist, betrachten wir den relativen Fehler. Es gilt:

$$\frac{dT}{T} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{l}{g}g}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}\frac{1}{2\pi}\,dl = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{dl}{l}}_{=1\%}\,.$$

Damit folgt eine Genauigkeit von 0.5%.

b) Die Abhängigkeit zwischen T und g lautet (mit $l = 1$):

$$T(g) = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}} \quad \Rightarrow \quad T'(g) = -\frac{\pi}{g\sqrt{g}}\,.$$

Also erhalten wir:

$$|dT| = \underbrace{\frac{\pi}{g\sqrt{g}}}_{=0.1022} \cdot \underbrace{|dg|}_{\leq 0.5\cdot 10^{-5}} \approx 0.5 \cdot 10^{-7}\,.$$

Aufgabe 2: Das Brechungsgesetz von Snellius lautet:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,.$$

Dabei ist α der Einfallswinkel (gegen das Lot) und β der Winkel zwischen Lichtstrahl und Einfallslot nach der Brechung. $n \geq 1$ gibt den Brechungsindex (Materialkonstante) an. Wie groß ist der relative Fehler bei der Berechnung des Brechungswinkels β, wenn der Einfallswinkel mit einem Fehler $\Delta\alpha$ gemessen wurde und der Brechungsindex als genau bekannt vorausgesetzt wird? Für welche Winkel $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist der Fehler am größten?

Lösung: Der Zusammenhang von β und α wird durch das Brechungsgesetz wie folgt beschrieben:

$$\beta = \beta(\alpha) = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right) \quad \Rightarrow \quad \beta'(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\,.$$

Damit gilt ungefähr:

$$|\Delta\beta| \approx |d\beta| = \left|\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right| \cdot |\Delta\alpha|\,.$$

Für den relativen Fehler teilen wir durch $|\beta|$:

$$\left|\frac{\Delta\beta}{\beta}\right| \approx \left|\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \cdot \frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin\alpha\right)}\right| \cdot |\Delta\alpha|\,.$$

Für $\alpha \in (0, \pi/2)$ tritt dann der größte Fehler für kleine Winkel α auf, da hier der obige Ausdruck gegen Unendlich strebt.

Aufgabe 3: Das Widerstandsmoment W eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt wird durch die folgende Formel beschrieben:

$$W(b,h) = \frac{1}{6}bh^2\,,$$

wobei b die Breite des Balkens bezeichnet und h die Höhe ist. Wir messen folgende Größen:

$$b = (18 \pm 0.01)\text{cm} \quad \text{und} \quad h = (10 \pm 0.01)\text{cm}\,.$$

Bestimmen Sie den relativen Fehler bei der Berechnung des Widerstandsmoments.

Lösung: Es gilt:

$$\Delta W \approx dW = \frac{\partial W}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial W}{\partial h}\Delta h = \frac{1}{6}h^2\Delta b + \frac{1}{3}bh\Delta h\,.$$

Hieraus erhalten wir den relativen Fehler wie folgt:

$$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{\Delta b}{b} + 2\frac{\Delta h}{h} = 0.003\,.$$

Aufgabe 4: Wir suchen die Schwingungsdauer T eines elektromagnetischen Schwingkreises, der aus der Kapazität C und der Induktivität L besteht. Die Formel lautet:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Wir messen $L = (5 \pm 0.05)$ mH und $C = (8 \pm 0.2)$ nF. Bestimmen Sie den absoluten Fehler bei der Bestimmung der Swingungsdauer.

Lösung: Es gilt:

$$\Delta T \approx dT = \frac{\partial T}{\partial L}\,\Delta L + \frac{\partial T}{\partial C}\,\Delta C = \frac{\pi}{\sqrt{LC}}\,(C\Delta L + L\Delta C)\ .$$

Der ermittelte Wert für die Schwingungsdauer liegt bei $3.97 \cdot 10^{-5}$ s, was einer Frequenz von ca. 25 kHz entspricht. Der absolute Fehler beträgt $6.95 \cdot 10^{-7}$.

Aufgabe 5: Wir betrachten einen Hohlzylinder mit dem Innenradius $r_i = (6 \pm 0.01)$ cm, dem Außenradius $r_a = (10 \pm 0.01)$ cm und der Höhe $h = 20$ cm. Wir wollen das Volumen des Hohlzylinders berechnen. Wie groß ist der absolute Fehler, wenn wir unsere Messungen verwenden?

Lösung: Für das Volumen gilt (Subtraktion zweier Zylinder):

$$V(r_a, r_i, h) = \pi(r_a^2 - r_i^2)h\,.$$

Damit gilt:

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r_a}\Delta r_a + \frac{\partial V}{\partial r_i}\Delta r_i = 2\pi r_a h\Delta r_a - 2\pi r_i h\Delta r_i\,.$$

Als Zahlwert ergibt sich: $\Delta V \approx 5.03\,\mathrm{cm}^2$.

Aufgabe 6: Sie wollen den Durchmesser d einer zylindrischen Scheibe bestimmen. Dazu messen Sie insgesamt 6-mal mit gleicher Genauigkeit. Es ergaben sich die folgenden Werte in cm:

$$5.61\,,\quad 5.59\,,\quad 5.50\,,\quad 5.68\,,\quad 5.65\quad \text{und}\quad 5.52\,.$$

a) Sie wollen ihre Messung in der Form $d \pm \Delta d$ angeben. Bestimmen Sie dazu den Messwert d und die Toleranz Δd mit statistischen Methoden.

b) Bestimmen Sie ein Vertrauensintervall mit Konfidenzniveau 90%. Arbeiten Sie hierzu mit Tabelle 1.

Lösung:

a) Wir benötigen den Mittelwert, die Standardabweichung und die Standardabweichung für den Mittelwert. Dazu ist es sinnvoll eine Tabelle aufzustellen (vgl. 2).

Hieraus erhalten wir den Mittelwert:

$$\bar{d} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{6} d_i = \frac{1}{6} \cdot 33.55 = 5.592 \approx 5.59\,\text{cm}\,.$$

Für die Standardabweichung der Messwerte gilt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{6-1} \cdot \sum_{i=1}^{6} \left(d_i - \bar{d}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 250.84 \cdot 10^{-4}} = 0.07\,\text{cm}\,.$$

Hieraus berechnen wir die Standardabweichung für den Mittelwert:

$$s_{\bar{d}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{0.07}{\sqrt{6}} = 0.03\,\text{cm}\,.$$

Wir identifizieren den Messwert mit dem Mittelwert $\bar{d}$ und die Toleranz mit der Standardabweichung $s_{\bar{d}}$, d.h. wir finden:

$$d \pm \Delta d = \bar{d} \pm s_{\bar{d}} = (5.59 \pm 0.03)\ \text{cm}\,.$$

b) Wir erhalten die Grenzen für das Intervall durch die folgende Formel:

$$\Delta d = t \cdot s_{\bar{d}}\,.$$

Den Wert für t lesen wir in der Tabelle 1 ab: es ist $n = 6$ und wir wählen $\gamma = 90$. Wir erhalten $t = 2.02$. Damit ergibt sich $\Delta d = 2.02 \cdot 0.03 \approx 0.06$. Damit erhalten wir das Vertrauensintervall $[5.59 - 0.06\,,\, 5.59 + 0.06]$.

Aufgabe 7: Die Kapazität eines Kondensators wurde 20-mal gemessen. Die Auswertung der Messreihe ergab dabei eine mittlere Kapazität von $C = 56.8$ mF und eine Standardabweichung von $s = 1.9$ mF.

a) Wie lauten die Vertrauensgrenzen für den "wahren" Wert (Mittelwert) bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1%?

b) Wie ändern sich diese Grenzen, wenn man die größere Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% in Kauf nehmen will?

Lösung:

a) Wir lesen den Parameterwert t aus der Tabelle 1 ab. Hierbei wählen wir $n = 20$ und $\gamma = 99\%$. Wir finden $t = 2.86$. Damit erhalten wir die Intervallbreiten:

$$\Delta C = t \cdot s_{\bar{C}} = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.86 \cdot \frac{1.9}{\sqrt{20}} = 1.2\,\mu\mathrm{F}\,.$$

Das Vertrauensintervall lautet: $[56.8 - 1.2\,,\, 56.8 + 1.2] = [55.6\,,\, 58.0]$.

b) Wir schauen nun bei $\gamma = 95$ in der Tabelle nach und finden $t = 2.09$. Damit erhalten wir:

$$\Delta C = t \cdot s_{\bar{C}} = t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.09 \cdot \frac{1.9}{\sqrt{20}} = 0.9\,\mu\mathrm{F}\,.$$

Das Vertrauensintervall lautet: $[56.8 - 0.9\,,\, 56.8 + 0.9] = [55.9\,,\, 57.7]$ (vgl. auch Abb. 3).

Aufgabe 8: Wir wollen die Dichte ρ einer Eisenkugel experimentell bestimmen. Dazu bestimmen wir die Masse m und den Durchmesser d der Kugel in unabhängigen Messreihen. Wir erhalten die folgenden Größen:

$$\text{Masse:} \quad m = 560.7\,\mathrm{g}\,, \quad \Delta m = s_{\bar{m}} = 0.5\,\mathrm{g}$$

$$\text{Durchmesser:} \quad d = 5.11\,\mathrm{cm}\,, \quad \Delta d = s_{\bar{d}} = 0.02\,\mathrm{cm}$$

a) Bestimmen Sie den Wert für die indirekte Messgröße ρ (Dichte).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der differentiellen, linearen Fehlerrechnung einen Wert für die zu erwartende Abweichung $\Delta\rho$.

c) Bestimmen Sie $\delta\rho$ mit Hilfe des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

Lösung:

a) Wir setzen die ermittelten Mittelwerte (entsprechen unserem finalen Messergebnis für die Masse und den Durchmesser) in die Formel für die Dichte der Kugel ein:

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{m}, \bar{d}) = \frac{\bar{m}}{V(\bar{d})} = \frac{\bar{m}}{\frac{\pi}{6}\bar{d}^3} = 8.025\,\mathrm{g/cm}^3\,.$$

b) Wir berechnen die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \partial_m \rho(m,d) &= \frac{6}{\pi \cdot d^3} \\ \partial_d \rho(m,d) &= -\frac{18 \cdot m}{\pi \cdot d^4}\,. \end{aligned}$$

Setzen wir die Mittelwerte $\bar{m}$ und $\bar{d}$ ein, erhalten wir: $\partial_m \rho = 0.0143$ und $\partial_d \rho = -4.7116$. Damit ergibt sich:

$$\Delta\rho \leq |\partial_m \rho| \cdot \Delta m + |\partial_d \rho| \cdot \Delta d = 0.1014\,\mathrm{g/cm}^3\,.$$

c) Wir haben bereits alle Größen bestimmt und setzen in die Formel ein:

$$\Delta\rho = \sqrt{(\partial_m \rho \cdot \Delta m)^2 + (\partial_d \rho \cdot \Delta d)^2} = 0.095\,\mathrm{g/cm^3}\,.$$

Aufgabe 9: Wir wollen die Federkonstante c einer elastischen Feder bestimmen. Diese hängt wie folgt mit der Schwingungsmasse m und der Schwingungsdauer T zusammen:

$$c = c(m,T) = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}\,.$$

In unabhängigen Versuchen wurden 10-mal m und T bestimmt (vgl. Tabelle 4).

Bestimmen Sie den Messwert für die Federkonstante in der Form $c \pm \Delta c$, indem Sie die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit $\Delta m = s_{\bar{m}}$ und $\Delta T = s_{\bar{T}}$ anwenden.

Lösung: Wir stellen die Tabelle in Abb. 5 auf. Und erhalten dann:

$$\bar{m} = 200\,\mathrm{g}\,, \quad s_{\bar{m}} = 0.7\,\mathrm{g}\,, \quad \bar{T} = 2\,\mathrm{s}\,, \quad s_{\bar{T}} = 0.01\,\mathrm{s}\,.$$

Damit können wir die Messwerte in der üblichen Form darstellen:

$$m = \bar{m} \pm \Delta m = \bar{m} \pm s_{\bar{m}} = (200 \pm 0.7)\,\mathrm{g} \quad \text{und} \quad T = \bar{T} \pm \Delta T = \bar{T} \pm s_{\bar{T}} = 2 \pm 0.01\,\mathrm{s}\,.$$

Damit erhalten wir folgenden Mittelwert für die Federkonstante, welcher dann dem Messwert entspricht:

$$\bar{c} = c(\bar{m}, \bar{T}) = 1973.9\,\mathrm{g/s^2} = 1.974\,\mathrm{N/m}\,.$$

Wir erhalten die übliche Einheit N/m, indem wir die Gramm in kg umwandeln. Zur Anwendung der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung benötigen wir die partiellen Ableitungen:

$$\partial_m c(m,T) = 4\pi^2 \cdot \frac{1}{T^2} \quad \partial_T c(m,T) = -8\pi^2 \cdot \frac{m}{T^3}\,.$$

Wenn wir die Werte einsetzen ergibt sich:

$$\partial_m c(\bar{m}, \bar{T}) = 9.8696\,\mathrm{s^{-1}} \quad \partial_T c(\bar{m}, \bar{T}) = -1973.9\,\mathrm{g/s^3}\,.$$

Final erhalten wir dann:

$$\Delta c = s_{\bar{c}} = \sqrt{(\partial_m \Delta m)^2 + (\partial_T \Delta T)^2} = 21.79\,\mathrm{g/s^2} = 0.022\,\mathrm{N/m}\,.$$

Damit ergibt sich der Messwert in der üblichen Form:

$$c = \bar{c} \pm \Delta c = (1.974 \pm 0.022)\,\mathrm{N/m}\,.$$

Anzahl n der Messwerte	Vertrauensniveau (statistische Sicherheit)			
	$\gamma = 68{,}3\,\%$	$\gamma = 90\,\%$	$\gamma = 95\,\%$	$\gamma = 99\,\%$
2	1,84	6,31	12,71	63,66
3	1,32	2,92	4,30	9,93
4	1,20	2,35	3,18	5,84
5	1,15	2,13	2,78	4,60
6	1,11	2,02	2,57	4,03
7	1,09	1,94	2,45	3,71
8	1,08	1,90	2,37	3,50
9	1,07	1,86	2,31	3,36
10	1,06	1,83	2,26	3,25
15	1,04	1,77	2,14	2,98
20	1,03	1,73	2,09	2,86
30	1,02	1,70	2,05	2,76
50	1,01	1,68	2,01	2,68
100	1,00	1,66	1,98	2,63
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	1,00	1,65	1,96	2,58

Abbildung 1: Tabelle zur Bestimmung des Vertrauensintervalls in Aufgabe 6.

i	$\frac{d_i}{\text{cm}}$	$\frac{d_i - \overline{d}}{\text{cm}}$	$\frac{(d_i - \overline{d})^2 \cdot 10^4}{\text{cm}^2}$
1	5,61	0,018	3,24
2	5,59	− 0,002	0,04
3	5,50	− 0,092	84,64
4	5,68	0,088	77,44
5	5,65	0,058	33,64
6	5,52	− 0,072	51,84
$\sum$	33,55	− 0,002	250,84
		≈ 0	

Abbildung 2: Wertetabelle zur Bestimmung der statistischen Größen in Aufgabe 6.

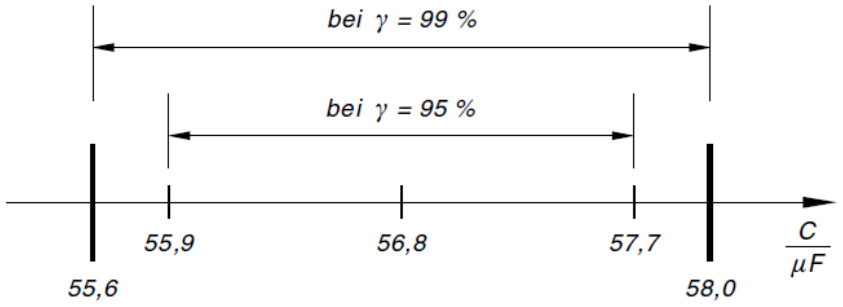


Abbildung 3: Vergleich der Vertrauensintervalle zu Aufgabe 7.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\frac{m}{\text{g}}$	198	199	203	200	202	198	201	197	203	199
$\frac{T}{\text{s}}$	2,01	2,04	1,96	1,98	2,00	2,05	1,97	1,98	2,04	1,97

Abbildung 4: Messwerte zu Aufgabe 9.

i	$\frac{m_i}{\text{g}}$	$\frac{m_i - \overline{m}}{\text{g}}$	$\frac{(m_i - \overline{m})^2}{\text{g}^2}$	$\frac{T_i}{\text{s}}$	$\frac{T_i - \overline{T}}{\text{s}}$	$\frac{(T_i - \overline{T})^2 \cdot 10^4}{\text{s}^2}$
1	198	−2	4	2,01	0,01	1
2	199	−1	1	2,04	0,04	16
3	203	3	9	1,96	−0,04	16
4	200	0	0	1,98	−0,02	4
5	202	2	4	2,00	0	0
6	198	−2	4	2,05	0,05	25
7	201	1	1	1,97	−0,03	9
8	197	−3	9	1,98	−0,02	4
9	203	3	9	2,04	0,04	16
10	199	−1	1	1,97	−0,03	9
$\sum$	2000	0	42	20,00	0	100

Abbildung 5: Berechnungen zu Aufgabe 9.