Übungen zu Mathematik III
Blatt 5

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Mehrfachintegrale:

a) $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x \cdot y \cdot z \, dx \, dy \, dz$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 x \cdot y \cdot z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^3 \int_0^2 \frac{y \cdot z}{2} \, dy \, dz \\ &= \int_0^3 z \, dz \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) \, d\varphi \, d\vartheta &= \int_0^{2\pi} 2\cos(\vartheta) \, d\vartheta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das zweite Integral muss nicht berechnet werden, da die Integration über die volle Periode bei Sinus und Cosinus immer null ergibt.

Aufgabe 2: Wir betrachten den elektrisch geladenen Einheitswürfel $[0,1]^3$ (Einheit in Meter). Die Ladung sei linear verteilt und wird durch die folgende Ladungsdichte (in Coulomb pro Quadratmeter) beschrieben:

$$\rho(x, y, z) = x - 2y + z \, .$$

Wie groß ist die Gesamtladung im Würfel?

Lösung: Das Volumenintegrale (Dreifachintegral) über den Würfel liefert die Gesamtladung:

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x - 2y + z \, dx \, dy \, dz \, .$$

Da der Integrand stetig ist, spielt die Intergrationsreihenfolge keine Rolle. Wir erhalten:

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x - 2y + z \, dx \, dy \, dz = 0 \, ,$$

d.h. der Würfel ist insgesamt gesehen elektrisch neutral, da sich positive und negative Ladungen aufheben.

Aufgabe 3: Wir betrachten folgende, allgemeine lineare Ladungsverteilung im Einheitswürfel $[0, 1]^3$ (Einheit in Meter):

$$\rho(x, y, z) = ax + by + cz \, .$$

Welche Bedingung muss an die Parameter a, b und c gestellt werden, damit die Ladungsverteilung elektrisch neutral ist?

Lösung: Wir integrieren über den Würfel:

$$Q = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 ax + by + cz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{2} (a + b + c) \, .$$

Damit die Ladungsverteilung neutral ist, muss die Summe $a + b + c$ verschwinden.

Aufgabe 4: Integrieren Sie das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

über den Halbkreis mit Radius $R = 1$, der in der oberen Halbebene des Koordinatensystems liegt.

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten und erhalten:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi (r \cos(\varphi))^2 + (r \sin(\varphi))^2 \, r \, d\varphi \, dr &= \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \underbrace{\left(\cos^2(\varphi) + sin^2(\varphi)\right)}_{=1} \, r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi r^3 \, d\varphi \, dr \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^1 r^3 \, dr \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5: Wir betrachten einen Kreisring, der sich durch zwei konzentrische Kreise mit Radien r und R ergibt, wobei $r < R$. Verwenden Sie die Integralrechnung um nachzuweisen, dass die Formel für den Flächeninhalt wie folgt lautet:

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) \, .$$

Lösung: Wir integrieren das Skalarfeld $f(x_1, x_2) = 1$ und verwenden Kugelkooridinaten:

$$
\begin{aligned}
\int_r^R \int_0^{2\pi} \tilde{r} \, d\varphi \, d\tilde{r} &= 2\pi \int_r^R \tilde{r} \, d\tilde{r} \\
&= \pi \tilde{r}^2 \big|_r^R \\
&= \pi \cdot (R^2 - r^2)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6: Berechnen Sie das Volumen des blauen Kugelsegmentes in Abb. 1.

Lösung: Wir integrieren das Skalarfeld $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\int_0^r \int_0^{\theta_0} \int_0^{2\pi} \tilde{r}^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, d\tilde{r} &= 2\pi \int_0^r \int_0^{\theta_0} \tilde{r}^2 \sin\theta \, d\theta \, d\tilde{r} \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3 \int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3 \left\{ -\cos\theta \right\}_0^{\theta_0} \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3 \left(1 - \cos\theta_0 \right) \, .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7: Integrieren Sie das Skalarfeld

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

über den Zylinder mit Höhe h und Radius R.

Lösung: Wir verwenden Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h (\underbrace{r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta}_{=r^2} + z^2) r \, dz \, d\theta \, dr &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^3 + z^2 r \, dz \, d\theta \, dr \\
&= \frac{\pi}{2} R^4 h + \frac{\pi}{3} h^3 R^2 \, .
\end{aligned}
$$

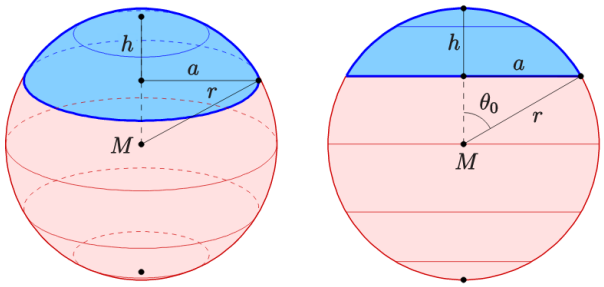


Abbildung 1: Wie groß ist das Volumen des blauen Kugelsegments?

Aufgabe 8: Berechnen Sie den Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel vom Radius R (Halbkugel über der x-Achse). Folgende Beziehung kann hilfreich sein:

$$\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)' = \cos\theta \cdot \sin\theta\,.$$

Lösung: Wir betrachten die obere Hälfte der Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R und verwenden Kugelkoordinaten. Aus Symmetriegründen und auf Grund der homogenen Massenverteilung sind die x_1 bzw. x_2 Koordinaten des Schwerpunktes null. Daher genügt es $x_{3,s}$ zu bestimmen. Es gilt allgemein:

$$x_{3,s} = \frac{1}{M}\iiint_V x_3\,dV\,,$$

da die Massenverteilung als homogen angenommen wurde. Durch verwenden von Kugelkoordinaten mit $\theta \in [0, \pi/2]$, dem Volumenelement $dV = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr$ und $x_3 = r\cos\theta$ erhalten wir:

$$x_{3,s} = \frac{1}{M}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r\cos\theta\, r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr = \frac{3}{8}R\,.$$

Der Schwerpunkt lautet also $x_s = (0, 0, 3/8R)$.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die mittlere Temperatur

$$\bar{T} = \frac{1}{A}\iint_K T(x_1, x_2)\,dA$$

einer kreisförmigen Heizplatte K mit Radius R unter der Annahme, dass die Temperatur von der Mitte (Temp. T_1) nach außen (Temp. T_2) linear abnimmt? Hierbei sei A der Flächeninhalt der Heizplatte und $T(r)$ beschreibt die lineare Temperaturverteilung im Abstand r vom Ursprung. Wie hängt die mittlere Temperatur mit der Größe der Heizplatte zusammen?

Lösung: Wir stellen zuerst die Funktion $T(r)$ auf, welche die Temperaturverteilung beschreibt.Wir wissen folgendes über die Temperaturverteilung:

- $T(r)$ ist linear, d.h. wir erhalten eine Geradengleichung in r.
- $T(0) = T_1$, Temperatur innen
- $T(R) = T_2$, Temperatur außen.

Dies liefert folgende Funktion:

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{R} r \,.$$

Wir verwenden Polarkoordinaten. Es gilt $dA = r\, dr\, d\phi$.

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{1}{A} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(T_1 + \frac{T_2 - T_1}{R} r \right) r \, d\phi \, dr \\ &= \frac{2\pi}{A} \int_0^R T_1 r + \frac{T_2 - T_1}{R} r^2 \, dr \\ &= \frac{2\pi}{A} \left(\frac{1}{6} T_1 + \frac{1}{3} T_2 \right) R^2 \,. \end{aligned}$$

Setzen wir noch $A = \pi R^2$ für die Fläche der kreisförmigen Platte ein, so erhalten wir schließlich:

$$\bar{T} = \frac{1}{3} T_1 + \frac{2}{3} T_2 \,.$$

Wir beobachten, dass nur die Temperaturen innen T_1 und außen T_2 die mittlere Temperatur bestimmen. $\bar{T}$ ist aber unabhängig vom Radius R der Platte und damit von der Plattengröße.