Übungen zu Mathematik III
Blatt 6

Aufgabe 1: Wir wollen den Flächeninhalt der Oberfläche O einer Kugel K mit Radius $R > 0$ berechnen. Hierzu können wir folgende Formel verwenden:

$$O = \iint\limits_K |\vec{N}(\varphi, \theta)| \, d\varphi \, d\theta \,,$$

wobei $\vec{N}|$ der Betrag des Normalenvektors ist. Berechnen Sie den Normalenvektor und bestimmen Sie anschließend die Oberfläche, indem Sie das Integral berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Literaturwerten z.B. aus dem Internet!

Lösung: Wir verwenden Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3 \,, \;\; \vec{r}(\varphi, \theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \,.$$

Wir bestimmen zunächst die Tangentialvektoren und dann aus deren Kreuzprodukt den Normalenvektor $\vec{N}$:

$$\vec{t}_\theta = \partial_\theta \vec{r}(\varphi, \theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t}_\varphi = \partial_\varphi \vec{r}(\varphi, \theta) = R \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \,.$$

$$\vec{N}(\varphi, \theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \times R \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \cdot \sin\theta \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \,.$$

Wir benötigen als nächstes den Betrag von $\vec{N}$. Es gilt: $|\vec{N}| = R^2 \sin\theta$. Damit ergibt sich folgende Oberfläche:

$$O = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2 \,.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der üblichen Formel in der Literatur überein.

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des halben Zylinders mit Radius $r = 1$ und Höhe $H = 1$ (siehe Abb. 1). Verwenden Sie hierzu geeignete Koordinaten, um die Oberfläche des Halbzylinders zu

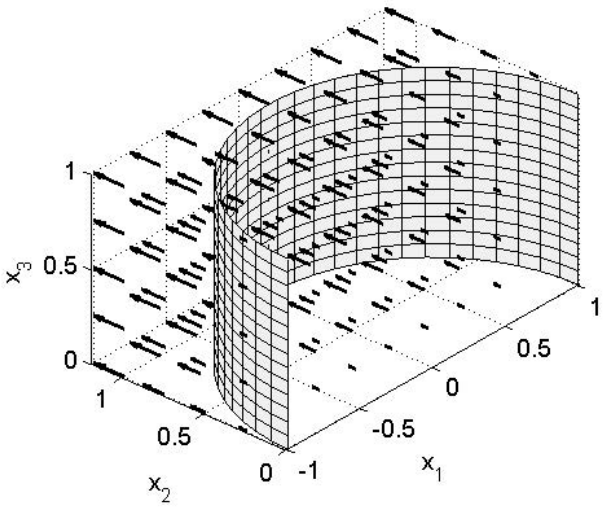


Abbildung 1: Fluss des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch den Halbzylinder.

parametrisieren. Hilfreich könnte auch folgende Stammfunktion sein:

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \varphi \, .$$

Lösung: Wir verwenden Zylinderkoordinaten und erhalten mit $r = 1$ folgende Parametrisierung:

$$\vec{r} : [0, \pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \, , \; \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \, .$$

Da es sich um einen Halbzylinder handelt, läuft der Parameter φ nur bis π. Ferner wird die Höhe durch eins begrenzt. Hieraus erhalten wir die Tangentialvektoren durch Differentiation nach den beiden Flächenparametern φ und z:

$$\vec{t}_\varphi = \partial_\varphi \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t}_z = \partial_z \vec{r}(\varphi, z) = R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

Den Normalenvektor erhalten wir als Kreuzprodukt:

$$\vec{N} = \vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Substituieren wir die Parametrisierung in $\vec{F}$ und Ersetzen den Normalenvektor, erhalten

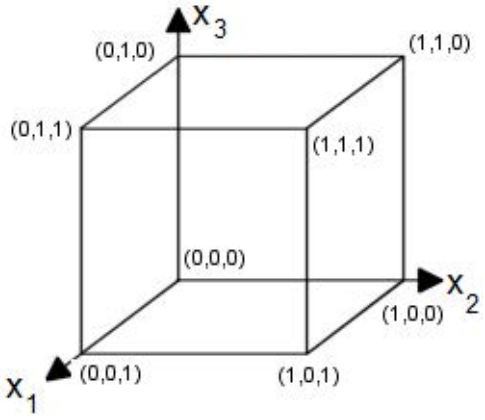


Abbildung 2: Einheitswürfel zu Auf. 3.

wir für den Fluss:

$$\Phi = \int_0^1 \int_0^\pi \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dz = \int_0^1 \int_0^\pi \sin^2\varphi\, d\varphi\, dz = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie den Fluss durch die Oberfläche des Einheitswürfels W (siehe Abb. 2) für das Vektorfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2^2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix}\,.$$

Wenden Sie zur Vereinfachung der Rechnung den Gauß'schen Integralsatz an.

Lösung: Wir wenden den Gauß'schen Satz an, um das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umzuwandeln:

$$\oiint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_W \operatorname{div} \vec{F}\, dV\,.$$

Dazu bestimmen wir zunächst die Divergenz:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2 + \partial_{x_3} F_3 = x_2 + 2x_2 + x_1 = x_1 + 3x_2\,.$$

Das Volumenintegral lautet dann (in kartesischen Koordinaten, die hier am besten geeignet sind!):

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1 + 3x_2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 2\,.$$

Damit beträgt der Fluss durch den Würfel zwei.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

durch die Kugeloberfläche der Kugel mit Radius R.

Lösung: Wir wenden den Gauß'schen Satz an und formen das zu berechnende Flussintegral durch die Kugeloberfläche ∂K in ein Volumenintegral über die Divergenz auf der Kugel K um:

$$\oiint_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dV\,.$$

Wir müssen also zuerst die Divergenz des Vektorfeldes bestimmen. Es gilt:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_{x_1} F_1 + \partial_{x_2} F_2 + \partial_{x_3} F_3 = 1 + 1 + 1 = 3\,.$$

Den gesuchten Fluss erhalten wir nun aus dem Volumenintegral, welches wir in Kugelkoordinaten berechnen:

$$\begin{aligned} \iiint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dV &= \iiint 3\, dV \\ &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 3r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi R^3 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Es ist folgendes Kraftfeld gegeben:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x^2 - 2yz \\ xz - yz \\ xy + y^2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten das Dreieck S, welches durch die drei Punkte

$$P_1 = (1,0,0)\,, \quad P_2 = (0,2,0) \quad \text{und} \quad P_3 = (0,0,2)$$

festgelegt wird (vgl. Abb. 3). Berechnen Sie folgende Größen:

a) die Rotation von $\vec{F}$

b) die von $\vec{F}$ geleistete Arbeit längs der orientierten Randkurve ∂S des Dreiecks S, indem Sie den Satz von Stokes anwenden. Das Dreieck kann wie folgt parametrisiert werden:

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2 - 2u - v \end{pmatrix}\,, \quad 0 \le u \le 1\,,\, 0 \le v \le 2 - 2u\,.$$

Lösung:

a) Es gilt:

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ -y \\ z \end{pmatrix} .$$

b) Die geleistete Arbeit erhalten wir durch das Wegintegral:

$$W = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{A} \,,$$

wobei wir den Stokes'schen Satz angewendet haben. Wir müssen also das Oberflächenintegral über das Dreieck berechnen.

Das Dreieck ist wie folgt parametrisiert:

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 2-2u-v \end{pmatrix} , \quad 0 \le u \le 1 \,,\, 0 \le v \le 2-2u \,.$$

Wir berechnen die Tangentialvektoren und daraus den Normalenvektor:

$$\vec{t}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgendes Integral:

$$\begin{aligned} W &= \iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{A} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2u} \begin{pmatrix} v \\ -v \\ 2-2u-v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dv\, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2u} 2-2u \, dv\, du \\ &= \int_0^1 4-8u-4u^2 \, du \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

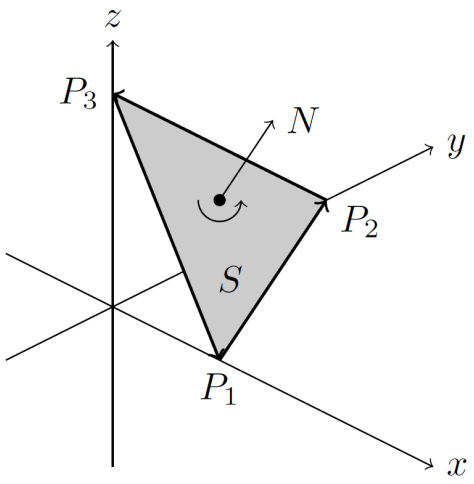


Abbildung 3: Dreieck zu Aufgabe 1.

Bemerkung zur Lösung via Stokes:

Normalerweise ist es aufwändiger ein Oberflächenintegral zu lösen als ein Wegintegral. Hier lohnt sich die Anwendung des Stokes'schen Satzes allerdings, da sich das Vektorfeld durch Anwenden der Rotation starkt vereinfacht. Weiter ist der Normalenvektor sehr einfach, da wir eine ebene Fläche haben. Vergleichen wir dies mit dem Wegintegral, bei dem wir über drei Wegabschnitte hätten integrieren müssen, so haben wir uns Rechenarbeit trotz Oberflächenintegral gespart.

Zusatzaufgabe 6: Wir betrachten eine Temperaturverteilung in K, die quadratisch mit dem Abstand zur x_3-Achse wächst

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + T_0\,,$$

wobei T_0 eine feste Temperatur ist. Wir interessieren uns für den Wärmestrom durch die Oberfläche O eines Zylinders mit Höhe H und Radius R, d.h. wir müssen folgendes Oberflächenintegral berechnen:

$$\dot{Q} = -\lambda \oiint_O \nabla T \, d\vec{A}\,.$$

Hierbei bezeichnet λ die Wärmeleitfähigkeit in $W/(mK)$.

Hinweis: Berücksichtigen Sie bei der Integration die spezielle Form der Temperaturverteilung bzw. die Richtung des Temperautrgradienten, so können Sie das Integrationsgebiet vereinfachen.

Lösung: Für den Temperaturgradienten erhalten wir:

$$\nabla T = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

d.h. er zeigt radial von der x_3-Achse weg und steht senkrecht auf der Mantelfläche des Zylinders. Insbesondere liegt kein Wärmefluss am "Boden" und "Deckel" des Zylinders vor. Wir müssen also nur über die Mantelfläche integrieren.

Wir verwenden Zylinderkoordinaten:

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \times [0, H] \to \mathbb{R}^3 , \ \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} .$$

Für die Tangentialvektoren und den Normalenvektor erhalten wir:

$$\vec{t}_\varphi = \partial_\theta \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{t}_z = \partial_\varphi \vec{r}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

$$\vec{N}(\varphi, \theta) = \vec{t}_\varphi \times \vec{t}_z = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir das folgende Oberflächenintegral:

$$\begin{aligned} \dot{Q} = -\lambda \int_0^H \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2R\cos\varphi \\ 2R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi\, dz &= -\lambda \int_0^H \int_0^{2\pi} \underbrace{2R^2\cos^2\varphi + 2R^2\sin^2\varphi}_{=2R^2}\, d\varphi\, dz \\ &= -4\pi\lambda R^2 \cdot H . \end{aligned}$$