Übungen zu Mathematik III
Blatt 7

Aufgabe 1: Die Matrix

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung um die z-Achse um den Winkel α, d.h. $R_z(\alpha) \cdot \vec{x}$ rotiert den Vektor $\vec{x}$ bzgl. der $z-$Achse um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn.

Die Eigenwerte der Matrix lauten:

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_{2,3} = \cos(\alpha) \pm i \cdot \sin(\alpha)\,.$$

a) Wie können sie den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ geometrisch deuten? Wie sieht der zugehörige Eigenvektor aus (keine Rechnung!)?

b) Die Eigenwerte $\lambda_{2,3}$ sind nur für spezielle Winkel reell. Bestimmen Sie diese Winkel und deuten Sie, warum genau für diese Winkel der Eigenwert reell ist. Wie sieht in diesem Fall die Abbildung aus?

Lösung:

a) Ein Eigenwert eins bedeutet, dass der zugehörige Eigenvektor $\vec{v}$ bei der Rotation auf sich selbst abgebildet, d.h. quasi nicht gedreht wird. Dies gilt nur für Vektoren, die in $z-$Richtung, d.h. in Richtung der Drehachse zeigen. Die Eigenvektoren sind daher Vielfache des Basisvektors $\vec{e}_z$: $\vec{v} = C \cdot \vec{e}_z$ mit $C \neq 0$ eine Konstante.

b) Wir können formal nachrechnen, dass bei Nullstellen des Sinus $\lambda_{2,3}$ reell sind. Das wäre bei

$$\alpha = n \cdot \pi\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

d.h. Vielfachen von $\pi = 180°$ der Fall. Auf Grund der Periodizität genügt es sich die Winkel π und 2π anzuschauen.

Bei einer Drehung um 180° werden alle Vektoren, die nicht ausschließlich in $z-$Richtung zeigen ($v_z = 0$), in ihre Gegenvektoren überführt, d.h. $R_z(\pi)\vec{v} = -\vec{v}$.

Bei einer Drehung um 360°, d.h. 2π, werden alle Vektoren auf sich selbst abgebildet. In diesem Fall stimmt die Drehmatrix mit der Einheitsmatrix überein.

Aufgabe 2: Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Analog ist sie negativ definit, wenn nur negative Eigenwerte vorliegen.

Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit, indem sie zunächst die Gerschgorin Kreise verwenden. Anschließend überprüfen sie ihre Ergebnisse, indem Sie die Eigenwerte ausrechnen:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung: Die Gerschgorin Kreise ergeben sich aus den Matrixelementen, indem als Mittelpunkt das jeweilige Diagonalelement gewählt wird. Die Radien ergeben sich aus der Summe der Beträge der zugehörigen Elemente in der entsprechenden Spalte und Zeile. Wir erhalten also für jedes Diagonalelement zwei Kreise.

a) Wir erahlten de facto nur einen Kreis, da sowohl beide Diagonalelemente, als auch die Nebendiagonalelemente identisch sind. Der Kreis besitzt den Mittelpunkt $m = 3$ und den Radius $r = 1$. Der Kreis liegt damit in der rechten Halbebene, woraus folgt, dass alle Eigenwerte positiv sind. Damit erwarten wir eine positiv definite Matrix.

   Zur Berechnung lösen wir $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ und erhalten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Da beide Eigenwerte positiv sind, ist die Matrix positiv definit.

b) Wir erahlten zwei Kreise. Beide haben den Radius $r = 1$. Der erst besitzt den Mittelpunkt $m = 3$ und liegt in der rechten Halbebene. Der zweite Kreis liegt mit Mittelpunkt $m = -3$ jedoch in der linken Halbebene. Als Ergebnis erwarten wir einen positiven und einen negativen Eigenwert, womit die Matrix indefinit ist.

   Wir lösen $\lambda^2 - 10 = 0$ und erhalten $\lambda_1 = \sqrt{10}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{10}$. Hier liegen Eigenwerte mit unterschiedlichen Vorzeichen vor, daher ist die Matrix indefinit (weder positiv noch negativ definit).

c) Bei einer Diagonalmatrix entsprechen die Diagolanelement den Eigenwerten. Wir haben hier also $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$. Alle Eigenwerte sind positiv, daher ist die Matrix positiv definit.

   Alternativ erhalten wir $(1 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) = 0$, woraus wir einerseits die Behauptung für Diagonalmatrizen und andererseits die Eigenwerte ablesen können.

Wenn wir für diesen Fall die Gerschgorin Kreise bestimmen, sind alle Radien $r = 0$, womit die Mittelpunkte (=Diagonalelemente) den Eigenwerten entsprechen.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms lauten:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3\,,\ \lambda_2 = 2\,.$$

Wir lösen die entsprechenden Gleichungssysteme (die keine eindeutige Lösung besitzen), um die Eigenvektoren zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des ersten Systems lautet: $x_2 = t$ und $x_1 = -1/2t$.

Die Lösung des zweiten Systems lautet: $x_2 = t$ und $x_1 = 2t$.

Hierbei ist $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Parameter. Damit erhalten wir die folgenden Eigenvektoren:

$$v_1 = t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad v_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Wenn wir partielle Differentialgleichungen diskretisieren, erhalten wir große Gleichungssysteme mit Tridiagonalmatrizen, wie z.B.

$$A_h := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & 1 & & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & & \\ . & . & . & . & . & . \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet $h \in \mathbb{R}^+$ einen kleinen Diskretisierungsparameter (Gitterabstände). Verwenden Sie die Gerschgorin Kreise um zu zeigen, dass die Matrix invertierbar und positiv definit ist.

Lösung: Wir erhalten auf Grund der Struktur der Matrix lediglich zwei verschiedene Kreise:

$$\left|\lambda - \frac{4}{h^2}\right| \leq \frac{2}{h^2} \quad \text{und} \quad \left|\lambda - \frac{4}{h^2}\right| \leq \frac{1}{h^2}\,.$$

In beiden Fällen gilt $\frac{4}{h^2} > \frac{2}{h^2} > \frac{1}{h^2}$, wehalb die Kreise in der rechten Halbebene liegen. $\lambda = 0$ ist nicht in den Kreisen enthalten, woraus folgt, dass alle Eigenwerte ungleich Null sind. Hieraus folgt, dass A_h invertierbar ist. Da die Kreise in der rechten Halbebene liegen, sind alle Eigenwerte positiv ($\lambda > 0$), woraus folgt, dass die Matrix positiv definit ist.

Aufgabe 5: Berechnen Sie eine allgemeine Lösung des folgenden homogenen DGL-Systems 1. Ordnung:

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t)\,.$$

Lösung: Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix. Die Eigenwerte lauten: $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 4$. Die Eigenvektoren sind:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}\,.$$