Übungen zu Mathematik III
Blatt 8

Aufgabe 1: Charakterisieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen, d.h. entscheiden Sie, ob die PDG's elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder von gemischtem Typ sind:

a) $\partial_x^2 u + 3\partial_x\partial_y u + 3\partial_y\partial_x u + \partial_y^2 u + 4\partial_x u = f$

b) $\partial_x(a(x,y)\partial_x u(x,y)) + \partial_y(a(x,y)\partial_y u(x,y)) = f(x,y)$ mit $a(x,y) > 0$

c) $\partial_x(a(x,y)\partial_x u(x,y,t)) + \partial_y(a(x,y)\partial_y u(x,y,t)) = f(x,y) + \partial_t u(x,y,t)$ mit $a(x,y) > 0$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Telegraphengleichung:

$$\partial_x^2 F(x,t) = a \cdot \partial_t^2 F(x,t) + b \cdot \partial_t F(x,t) + c \cdot \partial_x F(x,t) + d \cdot F(x,t)\,.$$

Zeigen Sie, dass die Telegraphengleichung für $a < 0$ elliptisch, für $a > 0$ hyperbolisch und für $a = 0$ parabolisch ist.

Aufgabe 3: Wir betrachten das folgende 1D Anfangsrandwertproblem (Neumannproblem) auf dem Intervall $[0, L]$:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) \\ u(x, t=0) &= f(x) \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Lösung nach dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$, analog zum Dirichlet Problem.

Aufgabe 4: Wir betrachten die 1D Schrödinger Gleichung auf dem Intervall $[0, L]$:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi(x,t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t) \\ \psi(x, t=0) &= \psi_0(x) \\ \psi(0,t) = \psi(L,t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Lösung nach dem Separationsansatz $\psi(x,t) = v(x) \cdot w(t)$, analog zur Wärmeleitungsgleichung.

Zusatzaufgabe: Wir betrachten das folgende Problem zur Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} &\partial_t u(\vec{x},t) = \Delta u(\vec{x},t) && \vec{x} \in G \text{ und } t \geq 0 \\ &u(\vec{x}, t=0) = f(\vec{x}) && \vec{x} \in G \\ &u(\vec{x},t) = g(\vec{x},t) && \vec{x} \in \partial G \text{ und } t \geq 0 \end{aligned}$$

Hierbei ist die erste Gleichung die partielle Differentialgleichung, die zweite beschreibt die Anfangswerte und die dritte Gleichung die Randbedingung.

Die Lösung zu diesem Problem erfüllt das Min-Max-Prinzip: Der Maximalwert und Minimalwert der Lösung u wird entweder am Anfang des betrachteten Zeitintervalls, d.h. bei $t = 0$ oder am Rand $\vec{x} \in \partial G$ zu einem späteren Zeitpunkt angenommen.

a) Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen $u_1(\vec{x}, t)$ und $u_2(\vec{x}, t)$ das Problem oben lösen. Wir betrachten die Differenz $u = u_1 - u_2$. Welches Problem löst die Differenz? Wie sehen insbesondere die Anfangs- und Randwerte für u aus?

b) Wenden Sie das Min-Max-Prinzip auf die Funktion $u = u_1 - u_2$ an und zeigen Sie, dass $u = 0$ gelten muss und dass damit die Lösung des Problems oben eindeutug ist.