Übungen zu Mathematik III
Blatt 8

Aufgabe 1: Charakterisieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen, d.h. entscheiden Sie, ob die PDG's elliptisch, parabolisch, hyperbolisch oder von gemischtem Typ sind:

a) $\partial_x^2 u + 3\partial_x\partial_y u + 3\partial_y\partial_x u + \partial_y^2 u + 4\partial_x u = f$

b) $\partial_x(a(x,y)\partial_x u(x,y)) + \partial_y(a(x,y)\partial_y u(x,y)) = f(x,y)$ mit $a(x,y) > 0$

c) $\partial_x(a(x,y)\partial_x u(x,y,t)) + \partial_y(a(x,y)\partial_y u(x,y,t)) = f(x,y) + \partial_t u(x,y,t)$ mit $a(x,y) > 0$

Lösung:

a) Die Matrix, die zu den Koeffizienten der zweiten Ableitungen gehört, lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte lauten: $\lambda = -2$ und $\lambda = 4$. Damit ist ein Eigenwert positiv und der andere negativ, weshalb die PDG hyperbolisch ist.

b) Wir müssen zunächst die PDG umformen, indem wir die Ableitungen ausrechnen (Produktregel):

$$\partial_x a(x,y)\cdot\partial_x u(x,y) + a(x,y)\cdot\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y a(x,y)\cdot\partial_y u(x,y) + a(x,y)\cdot\partial_y^2 u(x,y) = f(x,y).$$

Die Matrix lautet dann:

$$A = \begin{pmatrix} a(x,y) & 0 \\ 0 & a(x,y) \end{pmatrix},$$

da wir nur die Terme mit zweiten Ableitungen berücksichtigen. Die Eigenwerte entsprechen bei Diagonalmatrizen den Diagonaleinträgen, d.h. wir erhalten den doppelten Eigenwert $\lambda = a(x,y)$, der positiv ist, weil nach Voraussetzung $a(x,y) > 0$ gilt. Damit ist die PDG elliptisch.

c) Die PDG wird wie in b) umgeformt. Hier hängt die gesuchte Funktion u zusätzlich auch von t ab, allerdings tritt nur die erste Zeitableitung auf, weshalbt wir einen Nulleintrag in der Matrix haben:

$$A = \begin{pmatrix} a(x,y) & 0 & 0 \\ 0 & a(x,y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es liegt also ein parabolische Problem vor, da ein Eigenwert null ist und die restlichen Eigenwerte positiv sind.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Telegraphengleichung:

$$\partial_x^2 F(x,t) = a \cdot \partial_t^2 F(x,t) + b \cdot \partial_t F(x,t) + c \cdot \partial_x F(x,t) + d \cdot F(x,t)\,.$$

Zeigen Sie, dass die Telegraphengleichung für $a < 0$ elliptisch, für $a > 0$ hyperbolisch und für $a = 0$ parabolisch ist.

Lösung: Wir überfüren die PDG in die Standardform:

$$\partial_x^2 F(x,t) - a \cdot \partial_t^2 F(x,t) - b \cdot \partial_t F(x,t) - c \cdot \partial_x F(x,t) - d \cdot F(x,t) = 0\,.$$

Die Matrix mit den Koeffizienten der zweiten Ableitungen lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix},$$

Die Behauptung ergibt sich daraus, dass für $a < 0$ zwei positive Eigenwerte vorliegen, woraus eine elliptische PDG folgt. Für $a > 0$ liegt ein positiver und ein negativer Eigenwert vor, d.h. die PDG ist hyperbolisch. Für $a = 0$ haben wir schließlich eine parabolische PDG.

Aufgabe 3: Wir betrachten das folgende 1D Anfangsrandwertproblem (Neumannproblem) auf dem Intervall $[0, L]$:

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t) \\ u(x, t=0) &= f(x) \\ \partial_x u(0,t) = \partial_x u(L,t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Lösung nach dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$, analog zum Dirichlet Problem.

Lösung: Einsetzen des Ansatzes liefert folgende Gleichung, analog zum Dirichletproblem:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = \frac{u''(x)}{u(x)} = -\lambda\,.$$

Mit den gleichen Argumenten wie beim Dirichletproblem müssen beide Seiten einer Konstanten entsprechen, die negativ ist. Dies führt auf zwei gewöhnliche DGL's:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -\lambda w(t) \\ u''(x) + \lambda u(x) &= 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind entsprechend zum Dirichlet Problem:

$$\begin{aligned} w(t) &= C_1 e^{-\lambda t} \\ u(x) &= C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} t\right) + C_3 \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) . \end{aligned}$$

Wir versuchen als erstes die Randbedingungen zu erfüllen. Dazu müssen wir ableiten:

$$u'(x) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) - C_3 \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda} t\right) .$$

Wir setzen $x = 0$ ein, wodurch der zweite Term verschwindet:

$$0 = u'(0) = C_2 \sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 .$$

Es fallen also die Sinus-Terme weg. Übrig bleibt:

$$u(x) = C_3 \cos\left(\sqrt{\lambda} t\right) .$$

Wir betrachten die zweite Randbedingung bei $x = L$:

$$0 = u'(L) = -C_3 \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda} L\right) .$$

Der Sinus verschwindet, wenn das Argument ein Vielfaches von π ist, d.h. wir erhalten folgende Bedingung an das Argument:

$$\sqrt{\lambda} L = n \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} .$$

Um die Anfangsbedingung $u(x, t = 0) = f(x)$ erfüllen zu können, müssen wir $f(x)$ in eine entsprechende Fourier-Reihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) ,$$

hierbei werden die Koeffizienten C_n entsprechend bestimmt. Damit erhalten wir die finale Lösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} .$$

Die Lösung ist ähnlich wie beim Dirichlet-Problem, allerdings wird $f(x)$ hier bzgl. der Kosinusanteile entwickelt und nicht bzgl. der Sinusanteile.

Aufgabe 4: Wir betrachten die 1D Schrödinger Gleichung auf dem Intervall $[0, L]$:

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi(x, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi(x, t) \\ \psi(x, t = 0) &= \psi_0(x) \\ \psi(0, t) = \psi(L, t) &= 0 . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Lösung nach dem Separationsansatz $\psi(x,t) = v(x) \cdot w(t)$, analog zur Wärmeleitungsgleichung.

Lösung: Wir setzen den Separationsansatz in die Schrödinger Gleichung ein und formen wie üblich um:

$$i\hbar v(x) \cdot \dot{w}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} v''(x) \cdot w(t) \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{v''(x)}{v(x)}$$

Da beide Seite für alle Kombinationen von (x,t) gleich sind, müssen sie konstant sein. Wir bezeichnen die Konstante mit E (für die Energie) und erhalten zwei gewöhnliche DGL's:

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= -i\frac{E}{\hbar} w(t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m} v''(x) &= E v(x)\,. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung löst ein Exponentialansatz (oder Trennung der Veränderlichen):

$$w(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\,.$$

Aus Normierungsgründen (die Wellenfunktionen sind immer auf eins normiert, wegen der Wahrschinlichkeitsinterpretation), benötigen wir keine Integrationskonstante.

Die zweite Gleichung wir von den Funktionen

$$v(x) = \sin(\lambda x) \quad \text{und} \quad v(x) = \cos(\lambda x)\,,$$

mit passend zu wählendem Parameter λ gelöst.

Unser Lösungsansatz muss die Randwerte erfüllen, d.h. es muss gelten $v(0) = 0$, was nur der Sinus erfüllt, daher entfällt die Kosinus-Lösung. Damit der Sinus-Ansatz die zweite Randbedingung $v(L) = 0$ erfüllt, muss λ folgende Bedingung erfüllen:

$$\lambda \cdot L = n \cdot \pi$$

wir passen quasi die "Frequenz" des Sinus so an das Intervall $[0, L]$ (den Kasten) an, dass der Sinus in das "Intervall" passt. Diese Bedingung sorgt dafür, dass wir am Ende nur diskrete Energiewerte erhalten (Parameter $n \in \mathbb{N}$).

Wir erhalten eine weitere Bedingung an λ, da unser Ansatz auch die gewöhnliche DGL erfüllen muss:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} v''(x) = E v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 \sin(\lambda x) = E \sin(\lambda x)\,.$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\,.$$

Fassen wir die beiden Bedingungen an λ zusammen und formen nach E um, erhalten wir:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \,.$$

Damit ergeben sich die Lösungen:

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \,, \quad n \in \mathbb{N} \,.$$

Um die Anfangsbedingung $\psi(x, t = 0) = \psi_0(x)$ zu erfüllen, entwickeln wir die Funktion ψ_0 bzgl. unserer Lösungen (Fourier Reihe):

$$\psi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \,,$$

wobei sich die Entwicklungskoeffizienten c_n aus der Reihenentwicklung für ψ_0 ergeben.

Die gesamte Lösung lautet dann:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \, e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \,,$$

Zusatzaufgabe: Wir betrachten das folgende Problem zur Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{array}{ll} \partial_t u(\vec{x}, t) = \Delta u(\vec{x}, t) & \vec{x} \in G \text{ und } t \geq 0 \\ u(\vec{x}, t = 0) = f(\vec{x}) & \vec{x} \in G \\ u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t) & \vec{x} \in \partial G \text{ und } t \geq 0 \end{array}$$

Hierbei ist die erste Gleichung die partielle Differentialgleichung, die zweite beschreibt die Anfangswerte und die dritte Gleichung die Randbedingung.

Die Lösung zu diesem Problem erfüllt das Min-Max-Prinzip: Der Maximalwert und Minimalwert der Lösung u wird entweder am Anfang des betrachteten Zeitintervalls, d.h. bei $t = 0$ oder am Rand $\vec{x} \in \partial G$ zu einem späteren Zeitpunkt angenommen.

a) Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen $u_1(\vec{x}, t)$ und $u_2(\vec{x}, t)$ das Problem oben lösen. Wir betrachten die Differenz $u = u_1 - u_2$. Welches Problem löst die Differenz? Wie sehen insbesondere die Anfangs- und Randwerte für u aus?

b) Wenden Sie das Min-Max-Prinzip auf die Funktion $u = u_1 - u_2$ an und zeigen Sie, dass $u = 0$ gelten muss und dass damit die Lösung des Problems oben eindeutug ist.

Lösung:

a) Wir setzen die Differenz $u = u_1 - u_2$ in die Differentialgleichung, die Anfangsbedingung und die Randbedingung ein und verwenden dann, dass u_1 und u_2 Lösungen des obigen Problems sind:

$$\Delta u = \Delta(u_1 - u_2) = \Delta u_1 - \Delta u_2 = \partial_t u_1 - \partial_t u_2 = \partial_t(u_1 - u_2) = \partial_t u\,.$$

Im dirtten Schritt haben wir ausgenutzt, dass $\Delta u_i = \partial_t u_i$ gilt, weil u_i die DGL löst. Damit erfüllt u auch die DGL.

Wir betrachten den Anfangswert ($t = 0$) an einer beliebigen Stelle $\vec{x}$:

$$u(t = 0, \vec{x}) = u_1(t = 0, \vec{x}) - u_2(t = 0, \vec{x}) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}) = 0\,,$$

da u_1 und u_2 bei $t = 0$ als Lösungen des obigen Problems der Funktion f entsprechen. Somit verschwindet u zur Zeit $t = 0$.

Wir betrachten die Randbedingung, d.h. $\vec{x} \in \partial G$ zu einer beliebigen Zeit t:

$$u(t, \vec{x}) = u_1(t, \vec{x}) - u_2(t, \vec{x}) = g(t, \vec{x}) - g(t, \vec{x}) = 0\,,$$

da u_1 und u_2 am Rand als Lösungen des obigen Problems der Funktion g entsprechen. Damit verschwindet u auf dem Rand.

b) Da u die PDG löst, gilt auch für u das Min-Max-Prinzip. Das Maximum und das Minimum von u wird also entweder zur Zeit $t = 0$ oder am Rand ∂G angenommen. Zur Zeit $t = 0$ verschwindet u aber. Außerdem verschwindet u auf dem Rand. Daher muss $u = 0$ überall gelten, da das Minimum und das Maximum von $u = 0$ sind. Wir haben also:

$$0 = u = u_1 - u_2 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2$$