Übungen zu Mathematik I
Blatt 9

Aufgabe 1: Eine Messung ergab den Verlauf von $f(x)$, der in Abb. 1 gezeigt wird. Bestimmen Sie aus dem geplotteten Funktionsgraphen die Nullstellen, Extremstellen (Minima und Maxima) und die Wendepunkte.

Lösung: Die Originalfunktion lautet $f(x) = (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-5)$, daher liegen die Nullstellen bei $x = 1$, $x = 3$ und $x = 5$, was auch grob am Verlauf des durch Messfehler gestörten Graphen zu sehen ist. Die analytisch berechneten Extrema liegen bei $x = 3 - 2/\sqrt{3} \approx 1,84$ und $x = 3 - 2/\sqrt{3} \approx 4,15$, was zu den abgelesenen Werten im Bereich $x = 1,9$ (Maximum) und $x = 4,2$ (Minimum) passt. Der Wendepunkt liegt zwischen den Extrema, ungefähr bei $x = 3$, was auch dem analytisch berechneten Wert entspricht.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie Extrema (Maxima und Minima) und Wendepunkte zur Funktion $f(x)$, die in Form der Wertetabelle in Abb. 2 gegeben ist.

Lösung: Wir berechnen die Differenzen der Funktionswerte. Da die x-Werte nicht äquidistant sind, müssen wir zusätzlich die Differenzen der x-Werte berechnen. Wir betrachten anschließend den Quotienten. In Abb. 3 sehen wir, dass der Quotient zuerst positiv ist, d.h. hier steigt die Funktion. Ab $x = 0.8$ fällt die Funktion (neg. Wert). Daher liegt zwischen $x = 0,75$ und $x = 0.8$ ein Maximum. Ein analoges Argument zeigt, dass zwischen $x = 1.3$ und $x = 1.4$ ein Minimum liegen muss. Der Wendepunkt liegt zwischen den Extrema. Der Quotient (als Maß für die Steigung) wird bei $x = 1.1$ am größten, daher liegt hier in etwa der Wendepunkt.

Zum Vergleich ist die analytisch Funktion $f(x) = (x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5)$ in Abb. 4 geplottet.

Aufgabe 3: Abb. 5 zeigt die Schwingungen $x(t)$ einer Geige. Im oberen Bild ist das gesamte Signal zu sehen, darunter wurde in zwei Ausschnitte gezoomt. Beim ersten Ausschnitt wird die Geigensaite mit dem Bogen gespielt. Der zweite Ausschnitt zeigt das ausklingen des Tons. In der unteren Grafik ist die Fourier Analyse der beiden Ausschnitte zu sehen. Hierbei wurde die Amplitude auf eins normiert, sodass nur das Verhältnis zu erkennen ist und keine absoluten Werte. Was ist der Unterschied, wenn die Geige mit dem Bogen gestrichen wird oder wenn die Saiten einfach ausklingen?

Lösung: Wir sehen im linken Frequenzsprektrum wesentlich mehr Peaks als im rechten Bild. Hier ist im Wesentlichen ein großer Peak bei $290-300$ zu sehen, welche der Frequenz des gespielten Tons entspricht (Der Ton ist d'). Man spricht von der Grundfrequenz. Im

linken Bild sind zusätzlich weitere Frequenzen zu sehen. Die Abstände zwischen den Peaks scheinen hierbei immer gleich zu sein, d.h. es handelt sich um Vielfach der Grundfrequenz. Man spricht von Obertönen.

Vergleiche auch den Artikel Frequenzspektrum bei Wikipedia.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die folgenden Ableitungen:

a) $\dfrac{d}{du}\dfrac{(u^2v+v)^2}{u+v^3}$ b) $\dfrac{d}{dt}\left(a\cdot e^{-t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)$ (gedämpfte Schwingung)

c) $\dfrac{dp}{dv}$ und $\dfrac{dp}{dT}$, mit $p=\dfrac{RT}{v-b}-\dfrac{a}{v^2}$ (Van-der-Waals-Gleichung).

Lösung:

a) $\dfrac{d}{du}\dfrac{(u^2v+v)^2}{u+v^3}=\dfrac{3u^4v^2+4u^3v^5+2u^2v^2+4uv^5-v^2}{(u+v^3)^2}$

b) $\dfrac{d}{dt}\left(a\cdot e^{-t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)=a\cdot e^{-t}\left(-\sin(\omega t)+\omega\cdot\cos(\omega t)\right)$

c) $\dfrac{dp}{dv}=-\dfrac{RT}{(v-b)^2}+\dfrac{2a}{v^3}$ und $\dfrac{dp}{dT}=\dfrac{R}{v-b}$.

Aufgabe 5: Es seien $f(x)=x^2+2x+1$ und $g(x)=2x^2+4x$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten an der Stelle $x_0=1$ für f und g.

b) An welcher Stelle besitzen die Tangenten an f und g die Steigung $m=1$? Stellen Sie die Gleichungen dieser Tangenten auf.

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x)=x^2+2x+1 &\Rightarrow f'(x)=2x+2\\ g(x)=2x^2+4x &\Rightarrow g'(x)=4x+4\,. \end{aligned}$$

Die Steigung an der Stelle $x_0=1$ beträgt:

$$m_{t_f}=f'(1)=4 \quad\text{und}\quad m_{t_g}=g'(1)=8\,.$$

Die Punkte

$$(1, f(1)) = (1, 4) \quad \text{und} \quad (1, g(1)) = (1, 6)$$

liegen auf den jeweiligen Tangenten, daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 0 \\ 6 &= 8 \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = -2\,. \end{aligned}$$

Die Tangenten lauten also:

$$t_f : \, y = 4x \quad \text{und} \quad t_g : \, y = 8x - 2\,.$$

b) Die Steigung soll eins sein, d.h. es muss gelten $f'(x) = 1$ bzw. $g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 1 \quad 2x + 2 = 1 \quad x = -\frac{1}{2} \\ g'(x) = 1 \quad 4x + 4 = 1 \quad x = -\frac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

Die folgenden Punkte liegen auf den gesuchten Geraden:

$$(-1/2, f(-1/2)) = (-1/2, 1/4) \quad \text{und} \quad (-3/4, g(-3/4)) = (-3/4, -15/8)\,.$$

Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= -\frac{1}{2} + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{8} &= -\frac{3}{4} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{21}{8}\,. \end{aligned}$$

Die gesuchten Geraden sind:

$$g_1 : \, y = x + \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad g_2 : \, y = x - \frac{9}{8}\,.$$

Aufgabe 6: Wir betrachten die Funktion $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ und wollen ihr Steigungsverhalten untersuchen. Verwenden Sie dazu die erste Ableitung und geben sie die Bereiche an, in denen die Funktion steigt bzw. fällt.

Lösung: Die Ableitung lautet $f'(x) = 6x - 2$. Dort, wo die Ableitung positiv ist steigt die Funktion, dort wo sie negativ ist fällt sie. Daher betrachten wir die Ungleichung:

$$6x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{3}$$

Die Funktion (Parabel) fällt also für $x < 1/3$. Analog sehen wir, dass sie für $x > 1/3$ steigt. Bei $x = 1/3$ ist die Ableitung null, d.h. hier steigt bzw. fällt die Funktion nicht. Es handelt sich um den Scheitelpunkt der Parabel, der gleichzeitig ein lokales Minimum ist.

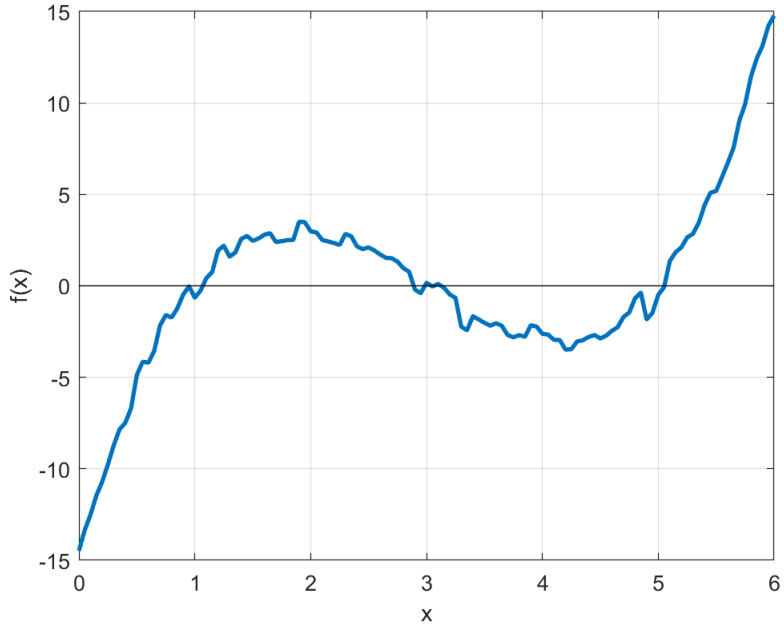


Abbildung 1: Messkurve $f(x)$ zu Aufgabe 1

x	0,1	0,2	0,4	0,6	0,75	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,9	2
f(x)	-0,504	-0,312	-0,066	0,036	0,047	0,042	0,024	-0,024	-0,042	-0,048	-0,036	0,066	0,504	0,75

Abbildung 2: Messwerte von $f(x)$ zu Aufgabe 2

x	0,1	0,2	0,4	0,6	0,75	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,9	2
f(x)	-0,504	-0,312	-0,066	0,036	0,047	0,042	0,024	-0,024	-0,042	-0,048	-0,036	0,066	0,504	0,75
Diff x		0,1	0,2	0,2	0,15	0,05	0,1	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1
Diff f		0,192	0,246	0,102	0,01088	-0,0049	-0,018	-0,048	-0,018	-0,006	0,012	0,102	0,438	0,246
D f/ D x		1,92	1,23	0,51	0,0725	-0,0975	-0,18	-0,24	-0,18	-0,06	0,12	0,51	1,46	2,46

Abbildung 3: Bearbeitete Messwerttabelle zu Aufgabe 2

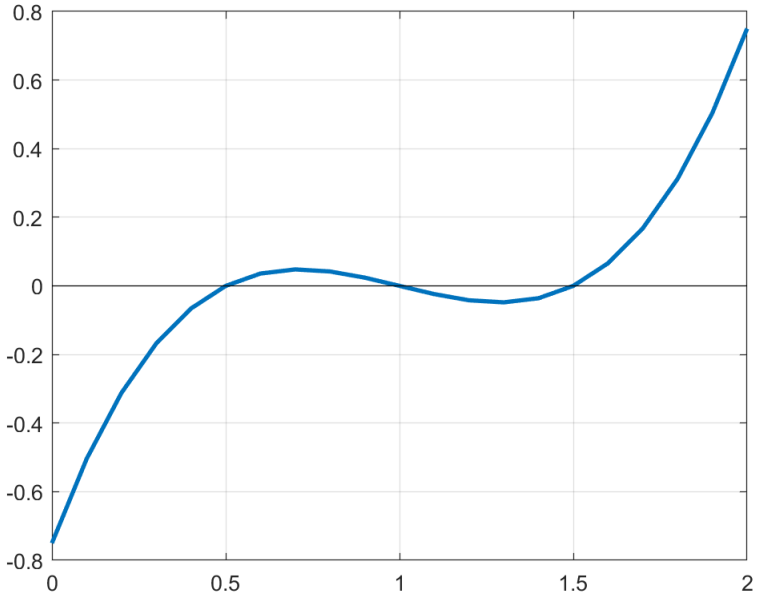


Abbildung 4: Plot von $f(x)$ zu Aufgabe 2

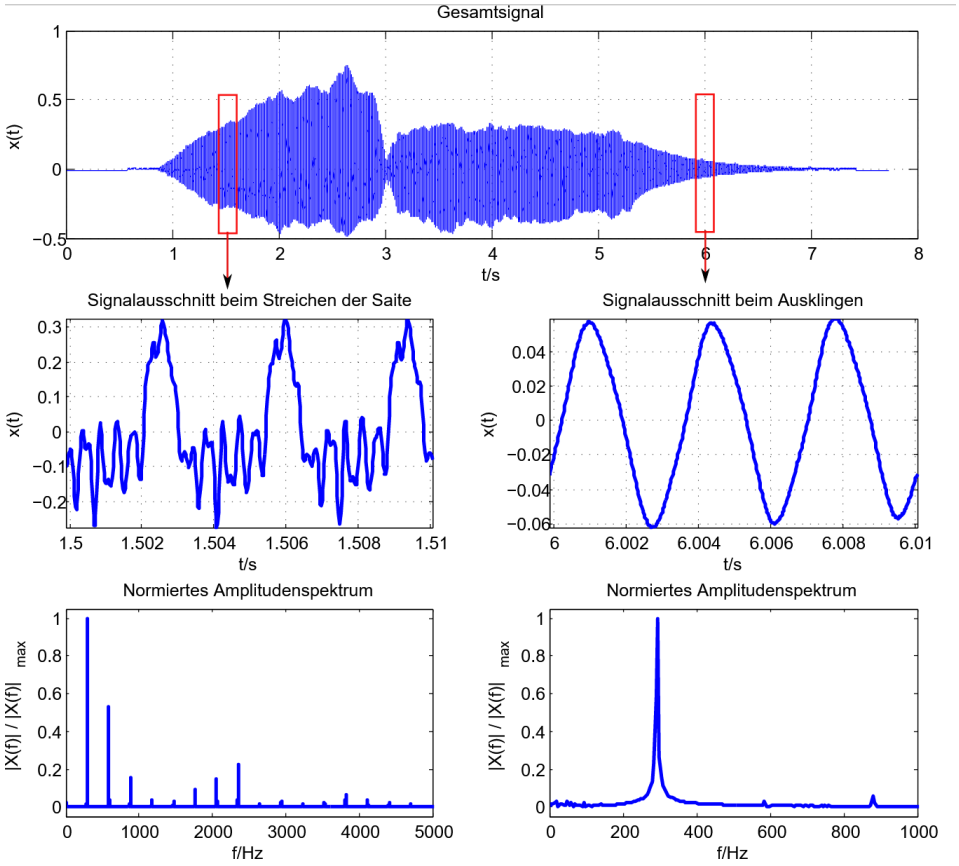


Abbildung 5: Spektrum eines Geigentons (Aufg. 3, Quelle: Wikipedia)