Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 10

Aufgabe 1: Bestimmen Sie näherungsweise den Funktionswert $\sin 0.5$, indem Sie die Sinusfunktion durch Polynome vom Grad $n = 1, 2, \ldots 5$ nach Taylor approximieren. Berechnen Sie auch den exakten Approximationsfehler, indem Sie den Wert $\sin 0.5$ mit dem Taschenrechner bestimmen (Bogenmaß!).

Lösung:

- 1. Ordnung (linear):

  $y = x$, also $y = 0.5$ mit Fehler 0.0206.

- 2. Ordnung (Parabel):

  Entspricht 1. Ordnung, da Sinus ungerade ist, d.h. es kommen keine Terme hinzu.

- 3. Ordnung (kubisch):

  $y = x - \frac{1}{6}x^3$, also $y = 0.4792$ mit Fehler $2.58 \cdot 10^{-4}$.

- 4. Ordnung:

  Entspricht 3. Ordnung (s.o).

- 5. Ordnung:

  $y = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, also $y = 0.4794$ mit Fehler $1.54 \cdot 10^{-6}$.

Aufgabe 2: Linearisieren Sie die folgenden beiden Funktionen im Punkt $x_0 = 1$.

i) $f(x) = x^2$

ii) $g(x) = x^3$

Lösung:

i) $f(x) \approx 1 + 2(x - 1) = 2x - 1\,.$

ii) $g(x) \approx 1 + 3(x - 1) = 3x - 2\,.$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie jeweils eine Linearisierung und eine Approximation 2. Ordnung zu den folgenden Funktionen in den angegebenen Entwicklungspunkten.

i) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1\,, \quad x_0 = 0$

ii) $f(x) = \sqrt{1+x}\,, \quad x_0 = 0$

iii) $\dfrac{1}{x}\,, \quad x_0 = 1$

Lösung:

i) $f(x) \approx 1 - x$ und $f(x) \approx 1 - x + x^2$

ii) $f(x) \approx 1 + \frac{1}{2}x$ und $f(x) \approx 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$

iii) $f(x) \approx 1 - (x-1) = 2 - x$ und $f(x) \approx 1 - (x-1) + (x-1)^2 = 3 - 3x + x^2$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie $\sqrt{3}$ näherungsweise mit Hilfe einer Taylor Entwicklung zweiter Ordnung und schätzen Sie den relativen Fehler mit Hilfe des nächsten Reihengliedes ab.

Lösung: Die Entwicklung bis zweiter Ordnung um $x_0 = 1$ lautet:

$$\sqrt{x} \approx 1 + 1/2\,(x-1) - 1/8\;(x-1)^2\;.$$

Damit erhalten wir

$$\sqrt{3} \approx 1 + 1 - 1/8\;(3-1)^2 = 1.5\,.$$

Das nächste Glied dritter Ordnung lautet $1/16(x-1)^3$. Die Funktion $(x-1)^3$ ist monoton steigend für $x > 0$, daher setzen wir $x = 3$ ein und erhalten die folgende Abschätzung für den relativen Fehler:

$$\frac{1/16(3-1)^3}{1.5} = 0.33\,,$$

d.h. in der Größenordnung von 33.33%.