Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 11

Aufgabe 1: Mit Hilfe der Taylorreihe soll $\sqrt{2}$ bestimmt werden. Verwenden Sie eine Entwicklung von $f(x) = \sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 4$ und zeigen Sie, dass eine Entwicklung bis zur Ordnung 3 eine Näherung liefert, bei der mindestens zwei Dezimalstellen korrekt sind, indem Sie eine geeignete Abschätzung verwenden.

Lösung:

Die Taylorentwicklung von $f(x) = \sqrt{x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 4$ liefert:

$$f(x) \approx 2 + \frac{1}{4} \cdot (x-4) - \frac{1}{64} \cdot (x-4)^2 + \frac{1}{512} \cdot (x-4)^3 - \frac{5}{16384} \cdot (x-4)^4 \dots$$

Wir schätzen den Fehler bei einer Entwicklung 3. Ordnung durch den Term 4. Ordnung ab:

$$\frac{5}{16384} \cdot (2-4)^4 = \frac{5}{1024} = 0.0049\,.$$

Damit sind mindestens zwei Dezimalstellen korrekt.

Aufgabe 2: Mit Hilfe der Taylorreihe soll die Eulersche Zahl auf sechs Stellen nach dem Komma genau bestimmt werden. Welche Ordnung muss die Approximation besitzen?

Hinweis: Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion kann als bekannt vorausgesetzt und verwendet werden!

Lösung:

Die Taylorreihe der Exponentialfunktion lautet:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Wir approximieren durch die n-te Teilsumme:

$$e \approx s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,.$$

Der begangene Fehler wird durch das nächste Reihenglied abgeschätzt, d.h.

$$|e - s_n| \approx \left| \frac{1}{(n+1)!} \right|\,.$$

Damit die Approximation auf sechs Stellen exakt ist, muss der Fehler kleiner als 10^{-7} sein, d.h.

$$\left| \frac{1}{(n+1)!} \right| \leq 10^{-7} \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! \geq 10^7\,.$$

Wir testen der Reihe nach alle Werte für n aus und finden: $10! = 3.6{\cdot}10^6$ und $11! = 3.9{\cdot}10^7$. Wir haben also gefunden, dass $n + 1 = 11$, ist woraus sich ergibt, dass wir bis zur 10. Ordnung entwickeln müssen. Nachprüfen mit dem Computer ergibt, dass bereits neun Stellen ausreichen.

Aufgabe 3: Zwischen Luftdruck p und Höhe h (gemessen bzgl. des Meeresniveaus) besteht unter Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang (barometrische Höhenformel):

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991\mathrm{m}}}, \quad h \geq 0\,\mathrm{m}\,.$$

Linearisieren Sie die Formel, d.h. leiten Sie einen lineare Zusammenhang zwischen p und h her. Bis zu welcher Höhe h_{max} liefert diese Näherung Werte, die um maximal 1% vom tatsächlichen Luftdruck abweichen?

Lösung:

Die Entwicklung nach Taylor ergibt sich einfach aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{h}{7991\,m} + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{7991\,m}\right)^2 + \ldots\right).$$

Die gesuchte Linearisierung ist daher:

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{h}{7991\,m}\right).$$

Den absoluten Fehler Δp können wir durch das nächste Glied in der Reihenentwicklung abschätzen. Der relative Fehler ergibt sich dann durch Division mit der linearen Approximation:

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{h}{7991\,m}\right)^2}{1 - \frac{h}{7991\,m}} \leq 0.01 \quad \Rightarrow \quad h = 1053\,.$$

Damit beträgt die maximale Höhe in etwa $h_{max} = 1053\,m$. Ein genaueres Ergebnis würde wir erhalten, wenn wir nicht durch die Linearisierung sondern durch die Exponentialfunktion teilen. In diesem Fall ist die Gleichung jedoch transzendent, d.h. nur per Computer lösbar. Das verbesserte Ergebnis ist: $h = 1058\,m$.

Aufgabe 4: Die Schwingungsdauer T einer ungedämpften elektromagnetischen Schwingung lässt sich nach der Beziehung $T = 2\pi\sqrt{LC}$ aus der Induktivität L und der Kapazität C berechnen.

i) Berechnen Sie die Schwingungsdauer für die Werte $L_0 = 0.1$ H und $C_0 = 10\,\mu$F.

ii) Bei einer Kapazitätsänderung um ΔC ändert sich die Schwingungsdauer um ΔT. Leiten Sie mit hilfe einer Potenzreihenentwicklung einen linearen Zusammenhang zwischen den Größen her, wenn die Induktivität gleich bleibt.

iii) Berechnen Sie mit dieser Näherungsformel die Änderung ΔT der Schwingungsdauer für den Fall $\Delta C = 0.6\,\mu\text{F}$. Vergleichen Sie diesen Wert mit der exakten Änderung.

Lösung:

i) Einsetzen in die Formel ergibt: $T_0 = 2\pi\sqrt{L_0 C_0} = 6.283 \cdot 10^{-3}\,s = 6.283\,ms$.

ii) Wir betrachten die Funktion: $T(C) = 2\pi\sqrt{L_0 C} = 2\pi\sqrt{L_0} \cdot \sqrt{C}$. Wir entwickeln $f(C) = \sqrt{C}$ um die Stelle C_0 nach Taylor:

$$f(C) = \sqrt{C} = \sqrt{C_0} + \frac{1}{2\sqrt{C_0}}\,(C - C_0) + \dots\,.$$

Verwenden wir dies in der ursprünglichen Funktion, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} T(C) &= 2\pi\sqrt{L_0} \cdot \sqrt{C} \\ &= 2\pi\sqrt{L_0} \cdot \left(\sqrt{C_0} + \frac{1}{2\sqrt{C_0}}\,(C - C_0) + \dots\right) \\ &= \underbrace{2\pi\sqrt{L_0} \cdot \sqrt{C_0}}_{T_0} + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,(C - C_0) + \dots \\ &= T_0 + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,(C - C_0) + \dots\,. \end{aligned}$$

Die Linearisierung lautet daher:

$$T(C) = T_0 + \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,(C - C_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta T = T - T_0 = \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,(C - C_0) = \pi\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\,\Delta C\,.$$

iii) Einsetzen von $\Delta C = 0.6\,\mu\text{F}$ in die Linearisierung liefert: $\Delta T = 1.89 \cdot 10^{-4}\,s = 0.189\,ms$. Einsetzen des Wertes in die exakte Formel ergibt schließlich: $\Delta T = 1.896 \cdot 10^{-4}\,s = 0.186\,ms$ zum Vergleich.

Aufgabe 5: Wir wollen das Skalarfeld f im Punkt $P = (1, 0)$ approximieren:

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_2)$$

i) Bestimmen Sie zunächst eine Linearisierung.

ii) Bestimmen Sie dann eine Approximation 2. Ordnung.

Lösung:

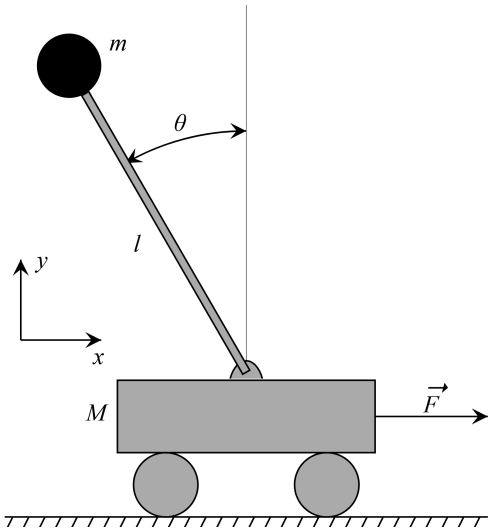


Abbildung 1: Inverses Pendel auf einem Wagen (z.B. ein Segway).

i) Der Gradient ist:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \cos(x_2) \\ -x_1 \sin(x_2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(P) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$f(x_1, x_2) \approx 1 + (1\,,\,0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 + x_1 - 1 = x_1$$

ii) Die Hesse Matrix lautet:

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(x_2) \\ -\sin(x_2) & -x_1 \cos(x_2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir:

$$f(x_1, x_2) \approx x_1 - \frac{1}{2} x_2^2$$

Aufgabe 6: Wir wollen ein inverses Pendel beschreiben, wie es in Abb. 1) dargestellt ist. Das zugehörige System von Differentialgleichungen ist nicht linear:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta}\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2 \sin\theta &= F \\ \ell\ddot{\theta} - g\sin\theta &= \ddot{x}\cos\theta \end{aligned}$$

Wenn wir nur kleine Auslenkungen θ betrachten, können wir die Gleichungen um den Punkt $\theta_0 = 0$ linearisieren.

Linearisieren Sie beide Gleichungen, indem sie die bekannten Linearisierungen für $\sin\theta$ und $\cos\theta$ verwenden.

Lösung: Wir nutzen zunächst $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1$ und ersetzen die entsprechenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta} + m\ell\dot{\theta}^2 \cdot \theta &= F \\ \ell\ddot{\theta} - g\theta &= \ddot{x} \end{aligned}$$

Der Term $m\ell\dot{\theta}^2 \cdot \theta$ ist immer noch nicht linear, da wir das Quadrat der ersten Ableitung mit θ multiplizieren. Wenn wir berücksichtigen, dass $\theta \approx 0$ ist, verschwindet dieser Term und wir erhalten:

$$\begin{aligned} (M+m)\ddot{x} - m\ell\ddot{\theta} &= F \\ \ell\ddot{\theta} - g\theta &= \ddot{x} \end{aligned}$$