Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 12

Aufgabe 1: Linearisieren Sie das folgende Skalarfeld um den Punkt $P = (1, 0)$

$$f(x, y) = x \cdot \cos(y)\,.$$

Lösung: Der Funktionswert ist $f(1, 0) = 1$. Wir erhalten den folgenden Gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(y) \\ -x \cdot \sin(y) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir folgende Linearisierung:

$$f(x, y) \approx 1 + (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} = 1 + x - 1 = x\,.$$

Aufgabe 2: Approximieren Sie das folgende Skalarfeld nach Taylor mit der Ordnung zwei um den Entwicklungspunkt $P = (1, 1)$

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 - xy^3\,.$$

Lösung: Der Funktionswert ist $f(1, 1) = 1$. Der Gradient lautet:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 - y^3 \\ 2xy - 3xy^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix lautet:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y - 3y^2 \\ 2y - 3y^2 & 2x - 6xy \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die Approximation 2. Ordnung:

$$f(x, y) \approx 1 + (3\,,\, -1) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x - 1\,,\, y - 1) \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Wir wollen das folgende Vektorfeld um den Ursprung linearisieren:

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy - 2x \\ y - 2xy \end{pmatrix}.$$

Linearisieren Sie hierzu die einzelnen Komponenten F_1 und F_2, die jeweils Skalarfelder sind.

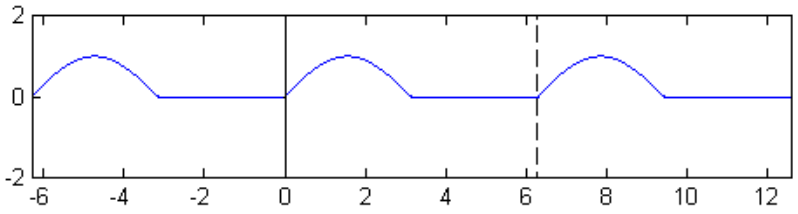


Abbildung 1: Einweggleichrichtung.

Lösung: Die Funktionswerte sind: $F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0$. Die Gradienten lauten:

$$\nabla F_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y-2 \\ x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla F_1(0,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

$$\nabla F_2(x,y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 1-2x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla F_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir einzeln:

$$F_1(x,y) \approx 0 + (-2\,,\,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2x\,.$$

$$F_2(x,y) \approx 0 + (0\,,\,1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\,.$$

Damit erhalten wir für das Vektorfeld:

$$\vec{F}(x,y) \approx \begin{pmatrix} -2x \\ y \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Fourier Reihenentwicklung der Einweggleichrichtung:

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \le x \le \pi \\ 0 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases} .$$

Hinweis: Sie können zum Lösen der Integral z.B. Wolfram Alpha oder eine Formelsammlung verwenden.

Lösung: Da leider keine Symmetrie zu erkennen ist, müssen wir alle Integrale ausrechnen, allerdings genügt es von 0 bis π zu integrieren. Wir erhalten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = -\frac{1}{\pi} \cos(x) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

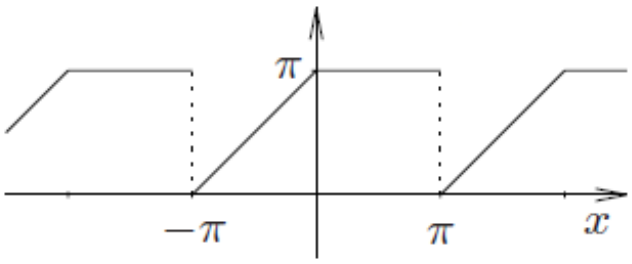


Abbildung 2: Funktion zu Aufgabe 5.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(x)\sin(nx) - n\sin(x)\cos(nx)}{n^2-1}\bigg|_0^{\pi} = 0\,, \quad n \neq 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}(x - \sin(x)\cos(x))\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x)\sin(nx) - n\cos(x)\cos(nx)}{n^2-1}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(n\pi)+1}{1-n^2}\,, \quad n \neq 1$$

Der Funktionswert ist $\cos(n\pi) = \pm 1$. Er variiert mit geradem und ungeradem n. Bei geraden n erhalten wir 2 im Zähler und bei ungeradem n verschwindet der Zähler. Daher treten nur die Terme mit geradne n auf und es gilt:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\frac{2}{1-n^2}\,, \quad n \,\text{gerade}\,.$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = 0$$

Damit erhalten wir die Reihe:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{3\pi}\cos(2x) - \frac{2}{15\pi}\cos(4x) - \frac{2}{35\pi}\cos(6x) - \ldots$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie den Gleichanteil, d.h. $m = a_0$ zur Funktion in Abb. 2.

Hinweis: Sie benötigen keine Rechnungen, wenn sie das zugehörige Integral geometrisch interpretieren.

Lösung: Für den Koeffizienten a_0 der Fourier Reihenentwicklung gilt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,.$$

Geometrisch interpretiert handelt es sich bei dem Integral um die Fläche unter der Kurve im Intervall $[-\pi\,,\,\pi]$. Der rechteckige Teil besitzt den Flächeninhalt $\pi \cdot \pi = \pi^2$. Der dreieckige Teil ist genau die Hälfte des Rechtecks, daher erhalten wir $\pi^2/2$. Insgesamt also:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \left(\pi^2 + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{3}{2}\pi\,.$$

Damit ergibt sich ein Gleichanteil von $m = \frac{3}{4}\pi$.

Aufgabe 6: Wir betrachten die folgende Fourier Reihe

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1}\,.$$

Beantworten Sie die folgenden Fragen:

a) Handelt es sich um eine gerade oder ungerade Funktion?

b) Ist die Funktion im Koordinatensystem verschoben oder um die $x-$Achse zentriert?

c) Wie lautet der Gleichanteil?

d) Wie lautet die Grundfrequenz und wie die zugehörige Amplitude?

e) Wie lautet die Frequenz der ersten Oberschwingung und wie die zugehörige Amplitude?

Lösung:

a) Da nur Sinus-Terme auftreten ist die Funktion ungerade, d.h. punktsymmetrisch.

b) Es tritt kein a_0 auf, daher ist die Funktion um die $x-$Achse zentriert und nicht verschoben.

c) Da $a_0 = 0$ ist der Gleichanteil ebenfalls null.

d) Die Grundfrequenz erhalten wir für $n = 1$. Sie ist eins. Die Amplitude ist ebenfalls eins.

e) Die erste Orberschwingung erhalten wir für $n = 1$ mit einer Frequenz von 3. Die Amplitude ist 1/3.

Hinweis: Es handelt sich um die Reihe der Rechteckfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1\pi < x < 2\pi & \end{cases}$$