Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 13

Aufgabe 1: Bestimmen Sie das Frequenzspektrum der Zeitfunktion

$$f(t) = \sin^2(\omega_0 t)\,.$$

Wie viele Spektrallinien enthält das Spektrum und bei welchen Frequenzen liegen sie?

Hinweis: Formen Sie wie folgt um

$$\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega_0 t)\right)\,.$$

Nutzen Sie anschließend, dass die Fourier Transformation linear ist und transformieren Sie die einzelnen Summanden, indem Sie die einzelnen Fourier Transformierten aus einer Tabelle heraussuchen. Die Konstante kann als Exponentialfunktion e^{-iat} mit geeignetem Wert für a aufgefasst werden.

Lösung: Wir erhalten:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}(\sin^2(\omega_0 t)) \\ &= \mathcal{F}(\frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega_0 t)\right)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\cos(2\omega_0 t))\right) \end{aligned}$$

Aus der Tabelle entnehmen wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\cos(at)) &= \pi\left(\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)\right) \\ \mathcal{F}(e^{-iat}) &= 2\pi \cdot \delta(\omega - a) \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist $a = 2\omega_0$ und im zweiten Fall setzen wir $a = 0$ um die Konstante eins zu bekommen. Das ergibt:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(1) - \mathcal{F}(\cos(2\omega_0 t))\right) \\ &= \pi \cdot \delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\left(\delta(\omega + 2\omega_0) + \delta(\omega - 2\omega_0)\right) \end{aligned}$$

Da in der Transformierten die Direc'sche Delta Funktion auftritt, erhalten wir im Spektrum genau drei Spektrallinien und zwar bei den Frequenzen $\omega = 0$ und $\omega = \pm 2\omega_0$.

Aufgabe 2: Wie lauten das Frequenzspektrum $F(\omega)$ und das Amplitudenspektrum $A(\omega) = |F(\omega)|$ der gedämpften Schwingung:

$$f(t) = e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \sigma(t)$$

mit $\delta > 0$ und der Sprungfunktion $\sigma(t)$ bei $t = 0$ von null auf den Wert eins?

Hinweis: Nutzen Sie wieder eine Tabelle mit Fourier Transformationen und die Linearität!

Lösung: Für das Frequenzspektrum erhalten wir nach Tabelle:

$$F(\omega) = \frac{\omega i}{(\delta + i\omega)^2 + \omega_0^2}$$

Um das Amplitudenspektrum zu erhalten, bestimmen wir den Betrag von Zähler und Nenner:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |F(\omega)| = \frac{|\omega i|}{|(\delta + i\omega)^2 + \omega_0^2|} \\ &= \frac{|\omega|}{|\delta^2 + 2\delta\omega i - \omega^2 + \omega_0^2|} \\ &= \frac{|\omega|}{\sqrt{4\delta^2\omega^2 + (\delta^2 - \omega^2 + \omega_0^2)^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie zur folgenden Funktion die Fourier Transformierte $F(\omega)$, indem Sie das entsprechende Integral berechnen:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$$

Lösung: Wir müssen partiell integrieren (oder verwenden Wolfram Alpha):

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-(1+i\omega)t}\, dt \\ &= \frac{2}{(1 + i\omega)^3} \end{aligned}$$