Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 14

Aufgabe 1: Es soll der Ohmsche Widerstand eines Stromkreises ermittelt werden. Dazu mißt man zu verschiedenen, vorgegebenen Spannungen U die Stromstärke I. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate den Widerstand R.

U in V	10	12	14	16	18	20
I in mA	2.0	2.3	2.9	3.2	3.5	4.1

Lösung: Es gilt das Ohm'sche Gesetz: $R = U/I$. Da wir U vorgeben und I messen, lösen wir diese Gleichung nach I auf: $I(U) = U/R$. Diese Funktion nehmen wir als Ansatz für die Methode der kleinsten Quadrate. Wir wollen also folgendes Problem lösen:

$$\min_R S(r) = \sum_{i=1}^{6} \left(I_i - \frac{U_i}{R} \right)^2 .$$

Das notwendige Kriterium für ein Minimum lautet: $\partial_R S(r) = 0$. Dies ergibt:

$$2 \sum_{i=1}^{6} \left(I_i - \frac{U_i}{R} \right) \frac{U_i}{R^2} = 0 \, .$$

Dividieren wir durch 2 und multiplizieren mit R^3 erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{6} \left(R I_i U_i - U_i^2 \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R \sum_{i=1}^{6} I_i U_i = \sum_{i=1}^{6} U_i^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\sum_{i=1}^{6} U_i^2}{\sum_{i=1}^{6} I_i U_i} \, .$$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Messreihe in der Tabelle unten. Analysieren Sie zunächst die Daten, um herauszufinden, ob ein linearer, quadratischer oder exponentieller Zusammenhang besteht (vgl. Mathe 1). Machen Sie anschließend einen sinvollen Ansatz und berechnen sie die Ausgleichskurve.

x	0	1	2	3	4
y	1.4	2.0	2.4	3.0	3.6

Lösung: Wir erweitern die Tabelle um das Verhalten zu analysieren:

x	0	1	2	3	4
y	1.4	2.0	2.4	3.0	3.6
Δy	–	0.6	0.4	0.6	0.6

Da die Differenzen der Funktionswerte nahezu äquidistant sind, gehen wir von einem linearen Verhalten aus. Der Funktionswert bei $x = 0$ ist ungleich null, daher wählen wir den Ansatz:

$$y = mx + b$$

mit den zu bestimenden Parametern m und b.

Die zugehörigen Normalengleichungen lauten:

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30.2 \\ 12.4 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet: $m = 0.54$ und $b = 1.4$.

Aufgabe 3: Es liegt eine Messung zur Aktivität A eines radioaktiven Präparates in Abhängigkeit von der Zeit t seit dem Start des Zerfalls vor (vgl. Tabelle unten). Der radioaktive Zerfall wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}\,.$$

t in s	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A in 10^6 Bq	4.0	3.3	2.6	2.1	1.7	1.4	1.1	0.9	0.7

a) Bestimmen Sie die unbekannten Parameter A_0 und λ aus dem Plot der Messreihe. Hilfreich könnte der Zusammenhang von λ mit der Halbwertszeit t_H sein.

b) Formulieren Sie ein nichtlineares Ausgleichsproblem, d.h. stellen sie die Zielfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate auf und bestimmen sie die nichtlinearen Gleichungen (nicht final lösen!).

c) Wenn sie einen Computer zur Hand haben, können sie ihre Ergebnisse mit Computerrechnungen vergleichen.

Lösung:

a) Wir erhalten A_0 aus dem Wert bei $t = 0$. In der Skizze lesen wir ab: $A(0) \approx 5$, damit $A_0 = 5$.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen der Halbwertzeit t_H und λ (z.B. Wikipedia):

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{t_H}\,.$$

Wir lesen den Zeitpunkt im Graphen ab, bei dem $A(t) \approx 2.5$ ist und erhalten ungefähr $t_H \approx 3.1$ und damit $\lambda = 0.2236$.

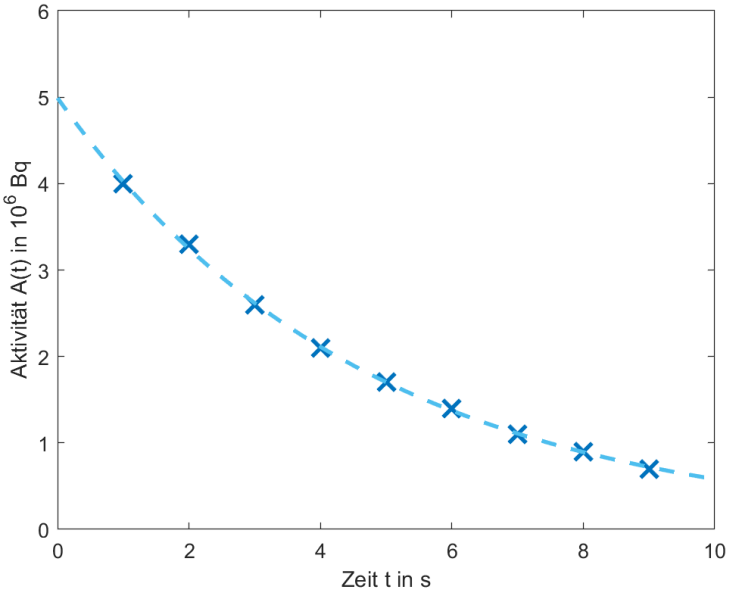


Abbildung 1: Zerfallskurve zu Aufgabe 3.

b) Die Zielfunktion lautet:

$$S(A_0, \lambda) = \sum_{i=1}^{9} \left(A_i - A_0 e^{-\lambda t_i}\right)^2$$

Wir erhalten die Gleichungen durch ableiten bzgl. A_0 und λ und null setzen:

$$\begin{aligned} \partial_{A_0} S &= -2 \sum_{i=1}^{9} \left(A_i - A_0 e^{-\lambda t_i}\right) \cdot e^{-\lambda t_i} \\ \partial_{A_0} S &= 2 \sum_{i=1}^{9} \left(A_i - A_0 e^{-\lambda t_i}\right) A_0 \cdot t_i \cdot e^{-\lambda t_i} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{9} \left(A_i - A_0 e^{-\lambda t_i}\right) \cdot e^{-\lambda t_i} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{9} \left(A_i - A_0 e^{-\lambda t_i}\right) A_0 \cdot t_i \cdot e^{-\lambda t_i} &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können nicht per Hand gerechnet werden!

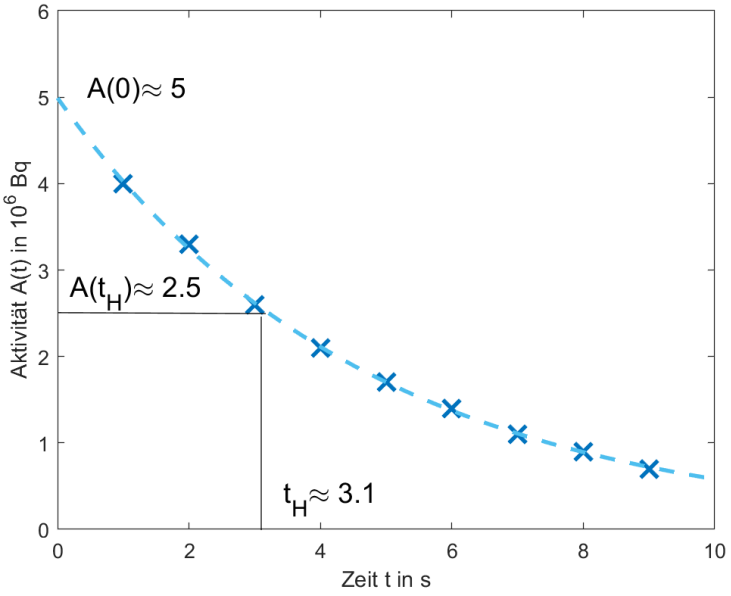


Abbildung 2: Bearbeitete Zerfallskurve zu Aufgabe 3.

c) Wenn wir z.B. Matlab (cftool) anwenden, erhalten wir

$$A(t) \approx 4.991 \cdot e^{-0.215t} .$$