Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 1

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = e^{x^2 - x}$

d) $f(t) = \sin(\omega \cdot t)$

e) $f(x) = x \sin(x^2)$

f) $f(x) = \ln(x^3 + x^2)$

Lösungen:

a) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$

c) $f'(x) = (2x - 1) \cdot e^{x^2 - x}$

d) $f'(t) = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$

e) $f'(x) = \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2)$

f) $f'(x) = \dfrac{3x + 2}{x^2 + x}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a) $\int 2x^3 + x^2 - x + 1 \, dx$

b) $\int x \cdot e^{-x} \, dx$

c) $\int \sqrt{2x - 1} \, dx$

d) $\int \frac{1}{2x+1} \, dx$

e) $\int \cos(2x) \, dx$

Lösungen:

a) $\int 2x^3 + x^2 - x + 1\,dx = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C$

b) $\int x \cdot e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x}$

c) $\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2}$

d) $\int \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1)$

e) $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2x)$

Aufgabe 3: Bestimme die partiellen Ableitungen bzgl. x_1 und x_2:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$

b) $f(x_1, x_2) = e^{x_1^2 + x_2^2}$

c) $f(x_1, x_2) = x_1 \ln(x_2)$

Lösungen:

a) $\partial_{x_1} f = 2x_1 + x_2$, $\partial_{x_2} f = -2x_2 + x_1$

b) $\partial_{x_1} f = 2x_1 e^{x_1^2 + x_2^2}$, $\partial_{x_2} f = 2x_2 e^{x_1^2 + x_2^2}$

c) $\partial_{x_1} f = \ln(x_2)$, $\partial_{x_2} f = \frac{x_1}{x_2}$

Aufgabe 4: Bestimme Sie den Gradienten der folgenden Skalarfelder:

a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_1 x_2 + 3$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 x_2 x_3}$

Lösungen:

a) $\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 - x_2 \\ x_1^2 - x_1 \end{pmatrix}$

b) $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 e^{x_1 x_2 x_3} \\ x_1 x_3 e^{x_1 x_2 x_3} \\ x_1 x_2 e^{x_1 x_2 x_3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Berechnen sie die Mehrfachintegrale:

a) $\int_0^2 \int_0^1 x_1^2 + x_1 x_2\,dx_1\,dx_2$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 x_1 \sin(x_2)\,dx_1\,dx_2$

Lösungen:

a) $\int_0^2 \int_0^1 x_1^2 + x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \frac{5}{3}$

b) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 x_1 \sin(x_2) \, dx_1 \, dx_2 = 0$

Aufgabe 6: Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ im Punkt $P = (1, 2)$:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 2$, $\vec{v} = (1, 1)^T$

b) $f(x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1 x_2$, $\vec{v} = (2, 1)^T$

Lösungen:

a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_0} = -\frac{6}{\sqrt{5}}$