Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 2

Aufgabe 1: Folgende Differentialgleichung beschreibt die Stromstärke $I(t)$ in einem elektrischen Schwingkreis:

$$LC\frac{d^2I}{dt^2} + RC\frac{dI}{dt} + I = 0\,.$$

Überprüfen Sie die Einheiten in der Gleichung.

Lösung: Es gilt:

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A^2 s^2}}\,,\quad \mathrm{F} = \frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{kg\,m^2}} \quad\Rightarrow\quad [LC] = \mathrm{HF} = \mathrm{s^2}\,.$$

und

$$\Omega = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A^2 s^3}} \quad\Rightarrow\quad [RC] = s\,.$$

Daher folgt:

$$\left[LC\cdot\frac{d^2I}{dt^2} + RC\frac{dI}{dt} + I\right] = \mathrm{s^2}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s^2}} + s\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \mathrm{A} = \mathrm{A}\,.$$

Aufgabe 2: Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Differentialgleichungen um gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen handelt. Welche Ordnung liegt vor? Sind die Differentialgleichungen linear oder nicht linear? Sind sie homogen oder inhomogen?

a) $y'(x) = f(x)y(x) + g(x)y^\alpha(x)$, mit $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$

(Bernoulli'sche Differentialgleichung)

b) $\dfrac{\partial v_i(t,\vec{x})}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i(t,\vec{x})}{\partial x_j}v_j(t,\vec{x}) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p(t,\vec{x})}{\partial x_i} = k_i$ mit $i = 1,2,3$

(Euler-Gleichung, Strömungsmechanik)

c) $\partial_x E_x(x,y,z) + \partial_y E_y(x,y,z) + \partial_z E_z(x,y,z) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

(1. Maxwell Gleichung)

Lösung:

a) Es handelt sich um eine gewöhnliche DGL, 1. Ordnung, die wegen y^α nichtlinear ist. Die DGL ist homogen, da $\alpha \neq 0$.

b) Es handelt sich um ein partielle DGL. Sie besitzt 1. Ordnung und ist wegen dem Summenterm nicht linear, da hier Ableitungen und gesuchte Funktionen multipliziert werden. Auf Grund der rechten Seite k_i (z.B. Schwerebeschleunigung) ist die DGL inhomogen.

c) Es liegt eine partielle DGL für die drei Vektorkomponenten des elektrischen Feldes vor. Sie hat Ordnung 1, ist linear und inhomogen wegen der rechten Seite (Quelle durch elektische Ladungsdichte).

Aufgabe 3: Geben Sie bei den folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen jeweils die Ordnung an und ob die Differentialgleichungen linear bzw. homogen sind oder nicht. Weisen Sie nach, dass die angegebenen Lösungen korrekt sind.

a) $y'(x) = y(x)^2$

Lösung: $y(x) = \frac{1}{C-x}$.

b) $y''(x) + y(x) = 0$

Lösung: $y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$

c) $y'(x) = y(x) - x$

Lösung: $y(x) = Ce^x + x + 1$

Lösung:

a) Wir finden: 1. Ordnung, nicht linear und homogen. Die erste Ableitung lautet:

$$y'(x) = \frac{1}{(C-x)^2} = y(x)^2$$

Daher erfüllt die Lösung die Differentialgleichung und ist außerdem einmal differenzierbar.

b) Wir finden: 2. Ordnung, linear und homogen. Die zweite Ableitung lautet:

$$y''(x) = -(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)) = -y(x) \quad \Rightarrow y''(x) + y(x) = 0$$

Daher erfüllt die Lösung die Differentialgleichung und ist außerdem zweimal differenzierbar.

c) Wir finden: 1. Ordnung, linear und inhomogen. Die erste Ableitung lautet:

$$y'(x) = Ce^x + 1 = \underbrace{y(x)}_{=Ce^x+x+1} - x$$

Daher erfüllt die Lösung die Differentialgleichung und ist außerdem einmal differenzierbar.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$y'(x) = \alpha \cdot y(x)\,,$$

mit einer Konstanten $\alpha \neq 0$. Raten Sie eine Lösung, indem sie überlegen, welche Funktion abgeleitet das α-fache Vielfache ihrer selbst ergibt.

Lösung: Die e-Funktion ergibt abgeleitet wieder die e-Funktion. Wir müssen daher das Argument so abändern, dass beim Ableiten ein α vor die e-Funktion kommt. Daher ist der Ansatz $y(x) = e^{\alpha x}$, was durch einfaches ableiten (Kettenregel) bestätigt wird.

Aufgabe 5: Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y''(x) + 4 \cdot y(x) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass sowohl $y_1(x) = \sin(2x)$, als auch $y_2(x) = \cos(2x)$ die Differentialgleichung lösen. Zeigen Sie außerdem, dass auch jede Kombination $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ mit beliebigen Konstanten, die Differentialgleichung löst. Woran liegt das?

Lösung: Wir leiten beide Funktionen zweimal ab:

$$y_1''(x) = -4\sin(2x) \quad \text{und} \quad y_2''(x) = -4\cos(2x)\,,$$

daher lösen beide Funktionen die Differentialgleichung. Da die Differentialgleichung linear und homogen ist, gilt das Superpositionsprinzip, weshalb jede Kombination wieder eine Lösung ist, was auch direkt nachgerechnet werden kann.

Aufgabe 6: Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = 0\,.$$

Zeigen Sie, dass folgende Funktion die Gleichung löst:

$$y(x) = e^{-x} \cdot \left(C_1 \sin(\sqrt{3}x) + C_2 \cos(\sqrt{3}x)\right)\,.$$

Wie sieht diese Funktion optisch aus? Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

Lösung: Wir leiten zweimal ab und setzen in die DGL ein. Es handelt sich um eine oszillierende Funktion (Sinus- und Kosinusanteil), wobei die Frequenz durch $\sqrt{3}$ gegeben wird. Die Amplitude wird aber durch den e-Anteil gedämpft, d.h. die Einhüllende der Funktion ist gegeben durch e^{-x}.

Aufgabe 7: Schreiben Sie willkürlich eine gewöhnliche Differentialgleichung auf und geben Sie diese ihrer Nachbarin oder ihrem Nachbarn. Diese sollen anschließend entscheiden, welche Ordnung die Differentialgleichung besitzt, ob sie linear ist oder nicht und ob sie homogen oder inhomogen ist. Disskutieren sie anschließend ihre Beispiel im Plenum.