Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 3

Aufgabe 1: Wir betrachten die folgende Differentialgleichung:

$$y'''(t) + y'(t) = 0\,.$$

Welche der folgenden Funktionen ist eine allgemeine Lösung? Begründen Sie ihre Antwort!

i) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$

ii) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t)$

iii) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3$

iv) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3\, t$

Lösungen: Da die DGL dritte Ordnung besitzt, muss die allgemeine Lösung drei Konstanten besitzen. Durch einsetzen sehen wir, dass $\sin(t)$, $\cos(t)$ und Konstanten die DGL erfüllen. Daher muss die allgemeine Lösung eine Kombination dieser Funktionen sein.

i) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$ Es fehlt die dritte Lösung, d.h. die dritte Konstante

ii) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3 \sin(t)$ Die Funktion $\sin(t)$ tritt doppelt auf, d.h. de facto sind nur zwei Konstanten vorhanden.

iii) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3$ Ist die korrekte allgemeine Lösung.

iv) $y(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + C_3\, t$ Wenn wir $C_3 t$ dreimal ableiten kommt null heraus. Bei der ersten Ableitung bleibt jedoch die Konstante stehen, d.h. $C_3 t$ ist keine Lösung der DGL.

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die folgenden Lösungen die entsprechenden Differentialgleichungen erfüllen. Bestimmen Sie anschließend den Wert der Integrationskonstanten, sodass die allgemeinen Lösungen das Anfangswertproblem lösen:

i) $y'(t) = t \cdot y(t)$, $y(0) = 2$ Lösung: $y(t) = Ce^{\frac{1}{2}t^2}$

ii) $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$, $f(1) = 2$ Lösung: $f(x) = C \cdot x$

iii) $x''(t) + x'(t) = 0$, $x(0) = 1$ und $x'(0) = -2$ Lösung: $x(t) = C_1 + C_2 e^{-x}$

Lösungen:

i) Die Konstante ist $C = 2$

ii) Die Konstante ist $C = 2$

iii) Die Konstanten lauten $C_1 = -1$ und $C_2 = 2$

Aufgabe 3: Wir betrachten die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $\partial_t T = \partial_x^2 T$, die z.B. die Temperaturverteilung in einem Metallstab beschreibt. Wenn wir nur an der stationären Verteilung interessiert sind, können wir die Zeitableitung gleich null setzen: $\partial_t T = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für die unbekannte Funktion $T(x)$:

$$T''(x) = 0\,.$$

i) Bestimmen Sie durch zweimaliges Integrieren die allgemeine, stationäre Lösung.

ii) Bestimmen Sie eine Lösung, die folgende Randwerte erfüllt: $T(0) = 10$ und $T(1) = 20$.

Lösungen:

i) Die erste Integration ergibt $T'(x) = C_1$. Die zweite dann den folgenden linearen Temperaturverlauf: $T(x) = C_1 \cdot x + C_2$.

ii) Die Lösung des Randwertproblems lautet: $T(x) = 10x + 10$, d.h. die stationäre Temperaturverteilung ist eine Gerade.

Aufgabe 4: Wir betrachten einen belasteten Balken, der am linken Ende fest eingespannt ist und dessen rechtes Ende frei ist (vgl. Abb. 1). Wenn wir die Form des Balkens an der Stelle x durch die Funktion $y(x)$ beschreiben, genügt diese Funktion der folgenden Differentialgleichung:

$$E \cdot I \cdot y^{(4)}(x) = w(x)\,.$$

Hierbei gibt die Funktion $w(x)$ die Belastung an der Stelle x am Balken an, E bezeichnet das Elastizitätsmodul und I ist das Trägheitsmoment des Querschnittes.

Beantworten Sie bitte die folgenden Fragen:

i) Welche Ordnung besitzt die Differentialgleichung?

ii) Wie viele Konstanten wird die allgemeine Lösung enthalten?

iii) Wie viele Bedingungen benötigen Sie, um eine konkrete Lösung für ein vorgegebenes Problem zu erhalten?

iv) Ist die Differentialgleichung homogen oder inhomogen?

v) Was passiert, wenn wir $w(x) = 0$ setzen?

vi) Ist die Differentialgleichung linear oder nicht linear?

Lösungen:

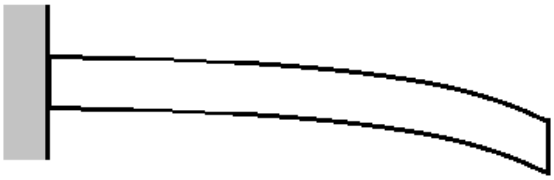


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Balken-Problems (Aufgabe 4)

i) Es tritt die vierte Ableitung auf, daher besitzt die DGL Ordnung vier.

ii) Auf Grund der Ordnung vier erwarten wir vier Konstanten.

iii) Um die vier Konstanten zu erhalten benötigen wir vier Bedingungen: je zwei Bedingungen an jedem Ende des Balkens, welche die jeweilige Situation (frei, fixiert, gelagert...) beschreiben.

iv) Die DGL ist inhomogen, wobei die Last $w(x)$ die Inhomogenität ist.

v) In diesem Fall ist die DGL homogen und wir beschreiben das Verhalten des Balkens ohne Last. Da keine Last auftritt und die Erdbeschleunigung in der DGL nicht berücksichtigt wird, wird sich der Balken nicht biegen.

vi) Die DGL ist linear.

Aufgabe 5: Wir betrachten einen belasteten Balken, der am linken und rechten Ende fest eingespannt ist (vgl. Abb. 2). Wenn wir die Form des Balkens an der Stelle x durch die Funktion $y(x)$ beschreiben, genügt diese Funktion der folgenden Differentialgleichung:

$$E \cdot I \cdot y^{(4)}(x) = w(x)\,.$$

Hierbei gibt die Funktion $w(x)$ die Belastung an der Stelle x am Balken an, E bezeichnet das Elastizitätsmodul und I ist das Trägheitsmoment des Querschnittes.

Wir betrachten einen Balken der Länge $L = 1$ m, mit $E \cdot I = 1$ und einer konstanten Last von $w(x) = -24$. Lösen Sie das zugehörige Randwertproblem, indem Sie die Differentialgleichung viermal integrieren. Unsere Randbedingungen werden hierbei wie folgt mathematisch beschrieben:

Festes Ende links: $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$

Festes Ende rechts: $y(1) = 0$ und $y'(1) = 0$

Bestimmen Sie das maximale Biegemoment, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird: $|M| \approx E \cdot I \cdot y''$. Überprüfen Sie auch, ob das erhaltene Ergebnis sinnvoll ist.

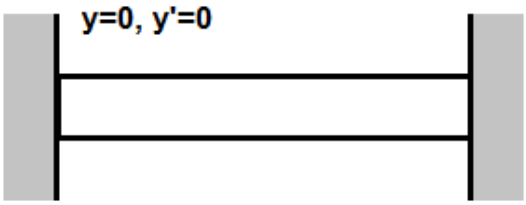


Abbildung 2: Schematische Darstellung des Balken-Problems (Aufgabe 5)

Lösungen: Vier mal Integrieren liefert folgende allgemeine Lösung:

$$y(x) = -x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4\,.$$

Einsetzen von $y(0) = 0$ und $y'(0) ==$ führt direkt zu $C_3 = C_4 = 0$. Einsetzen der Randbedingungen am anderen Ende führt auf ein 2×2 Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}C_1 + \frac{1}{2}C_2 &= 1 \\ \frac{1}{2}C_1 + 1C_2 &= 4 \end{aligned}$$

Die Lösung ist $C_1 = 12$ und $C_2 = -2$, womit wir final die folgende Lösung des Randwertproblems erhalten:

$$y(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2$$

Wir suchen das Maximum folgender Funktion:

$$|M(x)| \approx E \cdot I \cdot y''(x).$$

Wenn wir unsere Lösung zweimal ableiten, erhalten wir eine nach unten geöffnete Parabel, da der Faktor vor x^4 negativ ist. Daher liegt das Maximum im Scheitelpunkt der Parabel, der genau in der Mitte des Balkens bei $x = 1/2$ liegt. Das Ergebnis ist sinnvoll, da wir in der Mitte das größte Biegemoment erwarten.