Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 4

Aufgabe 1:

Bei den folgenden DGLs handelt es sich um lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit ihren entsprechenden Lösungen:

i) $xy'(x) = y(x) + x^2$, Lösung: $y(x) = Cx + x^2$

ii) $y'(x) = xy(x) + x$ Lösung: $y(x) = -1 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

iii) $y'(x) = y(x) + 2\sin(x)$ Lösung: $y(x) = Ke^x - \sin(x) - \cos(x)$

Bestimmen Sie jeweils die Inhomogenität in der DGL. Bestimmen Sie anschließend den inhomogenen und den homogenen Lösungsanteil! Vergleichen Sie den inhomogenen Lösungsanteil mit der Inhomogenität. Was stellen Sie fest?

Lösung:

i) $xy'(x) = y(x) + x^2$, Lösung: $y(x) = Cx + x^2$
Inhomogenität: x^2
inhom. Lösung: x^2
hom. Lösung: Cx

ii) $y'(x) = xy(x) + x$ Lösung: $y(x) = -1 + Ce^{\frac{1}{2}x^2}$
Inhomogenität: x
inhom. Lösung: -1
hom. Lösung: $Ce^{\frac{1}{2}x^2}$

iii) $y'(x) = y(x) + 2\sin(x)$ Lösung: $y(x) = Ke^x - \sin(x) - \cos(x)$
Inhomogenität: $2\sin(x)$
inhom. Lösung: $-\sin(x) - \cos(x)$
hom. Lösung: Ke^x

Aufgabe 2:

Berechnen Sie zuerst die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen. Prüfen Sie anschließend, ob Sie korrekt gerechnet haben.

i) $y' = x^3 y$

ii) $y' = y^2$

iii) $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$

iv) $y' = \dfrac{x}{y}$

Lösung: Die allgemeinen Lösungen können mit Hilfe von Trennung der Veränderlichen berechnet werden und lauten:

i) $y(x) = C \cdot e^{\frac{x^4}{4}}$

ii) $y(x) = \frac{1}{C-x}$

iii) $y(x) = C \cdot e^{2\sqrt{x}}$

iv) $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + C}$

Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden beiden Anfangswertprobleme, indem Sie zuerst die Differentialgleichung mit Hilfe der Methode Trennung der Veränderlichen lösen und anschließend den Wert der Integrationskonstanten entsprechend der vorgegebenen Anfangswerte bestimmen:

$$y'(t) = \frac{t}{y(t)}\,.$$

Die Anfangswerte sind jeweils:

i) $y(0) = 1$

ii) $y(0) = -1$

Betrachten Sie ferner den Anfangswert $y(0) = 0$ und zeigen Sie, dass die Lösung in diesem Fall nicht eindeutig ist.

Testen Sie anschließend für alle Lösungen, ob die gefundenen Funktionen auch tatsächlich die Differentialgleichung erfüllen.

Lösung: Umformen und Integration liefern:

$$y'(t) = \frac{t}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \int y\,dy = \int t\,dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + C\,.$$

Multiplizieren wir mit zwei und ziehen die Wurzel, so erhalten wir die beiden Lösungen:

$$y(t) = \pm\sqrt{t^2 + 2C}\,.$$

Welche Bedeutung die beiden Vorzeichen haben, wird klarer, wenn wir die unterschiedlichen Anfangswertprobleme betrachten:

i) $y(0) = 1$, d.h. wir setzen $t = 0$ in unsere Lösung y ein. Es soll dann eins herauskommen:

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2C} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}\,.$$

Hier müssen wir die positive Lösung wählen, um die Anfangsbedingung erfüllen zu können. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$y(t) = \sqrt{t^2 + 1}\,.$$

ii) $y(0) = -1$. Einsetzen, dieses Mal in die Lösung mit dem Minuszeichen, liefert:

$$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{2C} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{1}{2}\,.$$

Damit ergibt sich folgende Lösung:

$$y(t) = -\sqrt{t^2 + 1}\,.$$

Wir sehen also, dass die Wahl der Anfangswerte bestimmt, welche Lösung (Plus- oder Minuszeichen) wir wählen müssen. Zum Schluss testen wir noch, ob unsere Lösungen auch tatsächlich stimmen:

$$y'(t) = \frac{\pm t}{\sqrt{t^2 + 2C}} = \frac{t}{y(t)}$$

Damit erfüllt die allgemeine Lösung die Differentialgleichung.

Einsetzen von $t = 0$ in $y(t) = \pm\sqrt{t^2 + 1}$ liefert schließlich noch die jeweils geforderte Anfangsbedingung.

Verwenden wir $y(0) = 0$, sehen wir sofort, dass sowohl die Lösung mit dem Plus- als auch die Lösung mit dem Minuszeichen in Frage kommen:

$$y(0) = \pm\sqrt{0^2 + 2C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 0\,,$$

d.h. dieses Anfangswertproblem besitzt die beiden Lösungen $y_1(t) = t$ und $y_2(t) = -t$, also keine eindeutige Lösung.

Aufgabe 4:

Geben Sie die Ordnung der folgenden Differentialgleichung an. Ist sie linear oder nichtlinear, homogen oder inhomogen? Bestimmen Sie eine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

$$y' = x\sqrt{y}\,, \quad y(2) = 4\,.$$

Ist die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig?

Lösung: Die Ordnung ist eins, die Gleichung ist nichtlinear und homogen. Die Lösung durch Trennung der Veränderlichen lautet:

$$y(x) = (\frac{1}{4}x^2 + C)^2 \,.$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung erhalten wir zwei Werte für die Konstante: $C = 1$ und $C = -3$. Da beide Möglichkeiten das Anfangswertproblem lösen, ist die Lösung nicht eindeutig!

Aufgabe 5:

Wir wollen eine Flasche Bier kühlen. Bevor wir die Flasche in den Kühlschrank stellen, beträgt die Biertemperatur $T_0 = 17°$ C. Weiter nehmen wir an, dass im Kühlschrank eine konstante Temperatur von $T_A = 7°$ C herrscht. Wie lange müssen wir warten, bis das Bier eine angenehme Trinktemperatur von $T = 8°$ C erreicht? Wir beschreiben die Abkühlung mit Hilfe des Newton'schen Abkühlungsgesetzes:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_A)\,, \quad k > 0\,.$$

i) Bestimmen sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems mit dem Anfangswert $T(0) = T_0$.

ii) Bestimmen Sie die unbekannte Konstante $k > 0$ aus der Erwärmungskurve für Bier, welche in Abb. 1 gezeigt wird.

iii) Beantworten sie die Frage, wie lange wir warten müssen, bis das Bier kalt genug ist.

Lösung:

i) Wir können Trennung der Veränderlichen anwenden:

$$\int \frac{dT}{T - T_A} - k \int dt\,.$$

Die Lösung, inklusive Anfangswert, lautet dann:

$$T(t) = T_A + (T_0 - T_A)\, e^{-kt}\,.$$

ii) Aus der Abbildung entnehmen wir in etwa $k = 0.72$ pro Stunde (natürlich erhält hier jeder unterschiedliche Werte!).

iii) Mit dem gefundenen Wert für k in Teil ii), erhalten wir eine Abkühlzeit von etwa 3.19 Stunden.

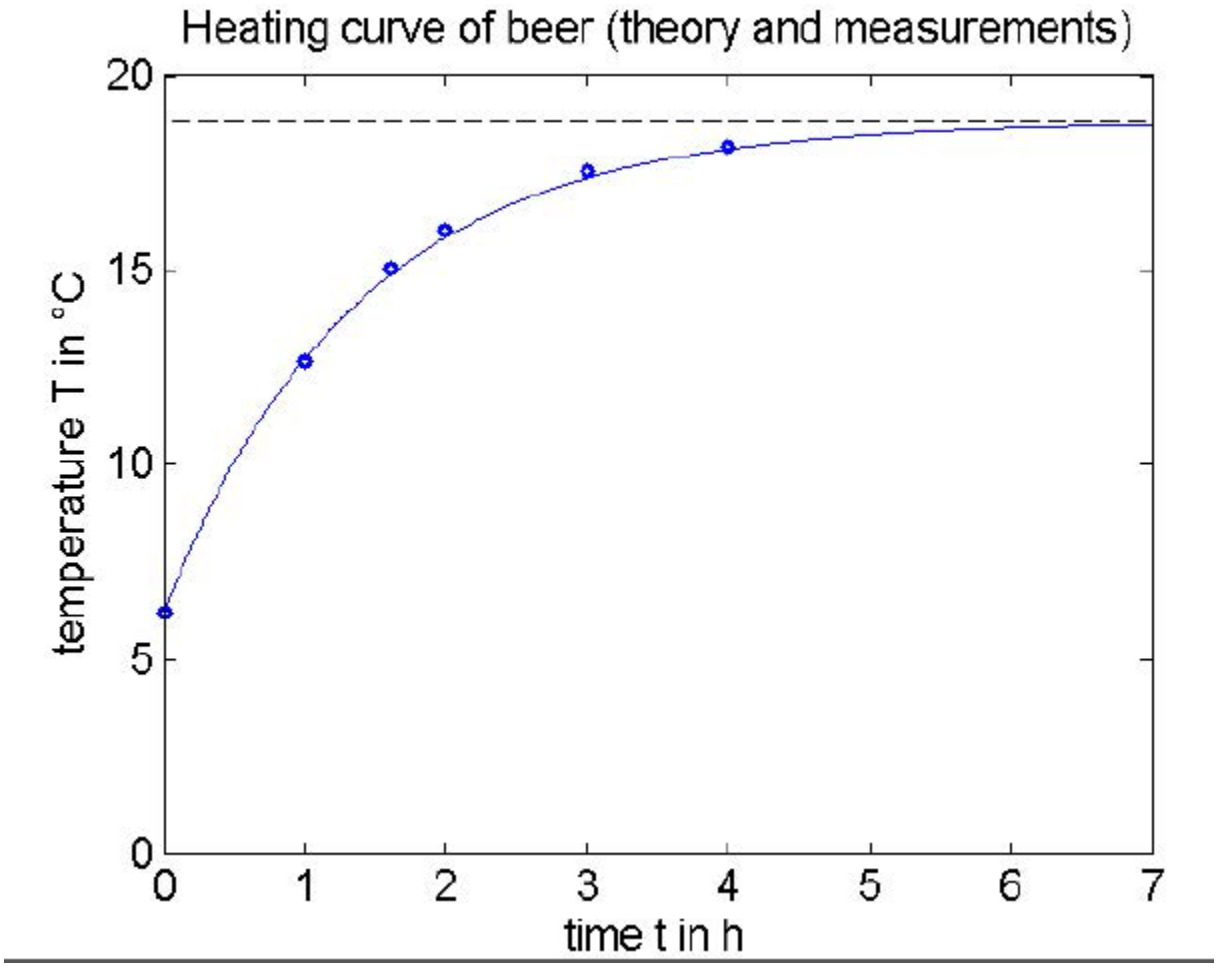


Abbildung 1: Abkühlkurve für Bier (Aufgabe 5)