# Übungen zu Mathematik II
# SoSe 2022
### Blatt Woche 5

**Aufgabe 1:**

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen erster Ordnung:

i) $xy' = 4y + x^5$, $x > 0$.

ii) $xy' = -y + e^x$,$x > 0$.

iii) $y' = y + xe^x \cos(x)$.

**Lösung:**

i) Die Lösung der homogenen Gleichung lautet $y(x) = Cx^4$ und durch Variation der Konstanten ergibt sich $y(x) = x^5 + Cx^4$.

ii) Die Lösung der homogenen Gleichung lautet $y(x) = \frac{C}{x}$ und durch Variation der Konstanten ergibt sich $y(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{C}{x}$.

iii) Die Lösung der homogenen Gleichung lautet $y(x) = Ce^x$ und durch Variation der Konstanten ergibt sich $y(x) = (\cos x + x \sin x)\, e^x + Ce^x$.

**Aufgabe 2:**

Liegt an einer Spule mit Induktivität $L$ und dem ohmschen Widerstand $R$ eine Gleichspannung $U_0$ an, so gilt für die Spannung am Widerstand:

$$U(t) = U_0 - L\dot{I}(t)\,.$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt weiter:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0}{R} - \frac{L}{R}\,\dot{I}(t)\,.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung für den Anfangsstrom $I(0) = 0$.

**Lösung:** Die allgemeine Lösung zur homogenen Gleichung lautet:

$$I_h(t) = c \cdot e^{-R/L \cdot t}\,.$$

Wir variieren die Konstante:

$$I_h(t) = c(t) \cdot e^{-R/L \cdot t} \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_h(t) = \dot{c}(t) \cdot e^{-R/L \cdot t} - c(t) \cdot \frac{R}{L} \cdot e^{-R/L \cdot t} .$$

Einsetzen in die inhomogene DGL liefert folgende Bestimmungsgleichung für die Konstante:

$$\frac{U_0}{R} - \frac{L}{R} \dot{c}(t) \cdot e^{-R/L \cdot t} = 0 .$$

Durch Umformen und Integrieren ergibt sich:

$$c(t) = \frac{U_0}{R} e^{R/L \cdot t} + d$$

mit einer neuen Konstanten $d$. Setzen wir dies in die homogene Lösung ein und formen um, erhalten wir die gesuchte allgemeine Lösung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} + d \cdot e^{-R/L \cdot t}$$

Berücksichtigung der Anfangswertes $I(0) = 0$ liefert speziell:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} \cdot e^{-R/L \cdot t}$$

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung. Ermitteln Sie hierzu zunächst die Ordnung der DGL. Ist die DGL linear? Ist Sie homogen oder inhomogen?

$$y' = -\frac{y}{x} + \cos(2x)$$

**Lösung:** Es liegt eine inhomogene, lineare DGL 1. Ordnung vor. Trennung der Veränderlichen liefert die allgemeine homogene Lösung:

$$y(x) = \frac{C}{x} .$$

Variation der Konstanten führt schließlich zur allgemeinen Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) .$$

**Aufgabe 4:**

Wir betrachten eine Schaltung mit Kondensator der Kapazität $C$ und Widerstand der Größe $R$. Weiter liegt eine externe Spannungsquelle $U_e(t)$ vor.

Für Zeiten $t < 0$ sei die externe Spannung $U_e(t) = 0$. Weiter fließe kein Strom im Kreis, d.h. $I(t) = 0$. Für $t \geq 0$ legen wir eine Spannung

$$U_e(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

mit konstanter Amplitude $U_0 > 0$ und konstanter Frequenz $\omega > 0$ an.

Berechnen Sie die Stromstärke $I(t)$, wenn die Schaltung durch folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dU_e(t)}{dt}\,.$$

**Hinweis:**

Das folgende Integral könnte nützlich sein (partielle Integration):

$$\int e^{\frac{t}{RC}} \cdot \sin(\omega t)\,dt = \frac{RC}{1+\omega^2R^2C^2} \cdot e^{\frac{t}{RC}} \cdot (\sin(\omega t) - \omega RC \cdot \cos(\omega t))\ .$$

**Lösung:** Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet:

$$I(t) = K(t)\,e^{-\frac{t}{RC}}\ .$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir die allgemeine Lösung mit Integrationskonstante $K$:

$$I(t) = -\frac{U_0\omega C}{1+\omega^2R^2C^2}\ (\sin(\omega t) - RC\omega\ \cos(\omega t)) + Ke^{-\frac{t}{RC}}\ .$$