Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 6

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie mit Hilfe der Wronski Determinante, welche der folgenden Funktionssysteme linear unabhängig sind:

i) $\{t^2 + t, t\}$, $t \in \mathbb{R}$.

ii) $\{e^t, e^{2t}\}$, $t \in \mathbb{R}$.

iii) $\{\sin x, \cos x\}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\{1, \sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha\}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Lösung:

i) Die Wronski Determinante ergibt $-t^2$, was für $t = 1$ z.B. ungleich Null ist, daher ist das System linear unabhängig.

ii) Die Wronskideterminante ergibt e^{3t}, was immer ungleich Null ist (z.B. $t = 0$ einsetzen), daher ist das System linear unabhängig.

iii) Die Wronskideterminante ist [tex]-1[/tex], also immer ungleich Null, daher ist das System linear unabhängig.

Aufgabe 2:

Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist das System $\{e^{at}, e^{bt}\}$ linear unabhängig/abhängig?

Lösung: Die Wronskideterminante ist $(b - a)e^{(a+b)t}$. Sie ist für $a \neq b$ immer ungleich Null, daher ist in diesem Fall das System linear unabhängig. Für $a = b$ stimmen beide Funktionen überein, daher ist das System trivialer weise linear abhängig.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Wornski Determinante von folgendem System:

$$\{1, \sin^2 \alpha, \cos^2 \alpha\}, \quad \alpha \in [0, 2\pi].$$

Begründen Sie, warum das System linear abhängig ist!

Lösung: Die Wronski Determinante ist null, daher betrachten wir das System genauer. Es gilt $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, daher kann eine Funktion durch die anderen beiden ausgedrückt werden. Die drei Funktionen enthalten also keine neuen, voneinander unabhängigen Informationen, d.h. zwei Funktionen würden ausreichen. Also ist das System abhängig.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

i) $y'' + 4y' + 2y = 0$

ii) $y'' + y' + y = 0$

iii) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Lösung:

i) $y'' + 4y' + 2y = 0$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}\,.$$

Damit erhalten wir die Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{(-2+\sqrt{2})\cdot x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{2})\cdot x}\,.$$

ii) $y'' + y' + y = 0$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Damit erhalten wir die Lösung:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right))\,.$$

iii) $y'' - 6y' + 9y = 0$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 3\,.$$

Damit erhalten wir die Lösung:

$$y(x) = C_1\, e^{3x} + C_2 x e^{3x}\,.$$

Aufgabe 5:

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 0 \quad y(0) = 1\,,\; y'(0) = 0\,.$$

Lösung:

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

mit den beiden konjugiert komplexen Lösungen $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y(t) = e^{-t}\left(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)\right)\,.$$

Leiten wir diese Lösung einmal ab und setzen die Anfangswerte ein, ergibt sich $C_1 = C_2 = 1$.

Aufgabe 6:

Wir betrachten das Masse-Feder System in einer Uhr zum Aufziehen. Der Reibungskoeffizient beträgt $d = 0.001\,\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$ und die Federkonstante besitzt die Größe $k = 0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Bestimmen Sie die Masse, mit der wir die Feder belasten müssen, sodass das System mit einer Frequenz von 2 Hz schwingt. Die zugehörige Differentialgleichung lautet:

$$my'' + dy' + ky = 0\,.$$

Lösung: Durch Einsetzen der Werte erhalten wir:

$$my'' + 0.001y' + 0.1y = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$m\lambda^2 + 0.001\lambda + 0.1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-0.001 \pm \sqrt{0.001^2 - 4m \cdot 0.1}}{2m}\,.$$

Wir erhalten eine Schwingung von 2 Hz durch $\sin(\omega t)$ und $cos(\omega t)$ mit $\omega = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$, da dann die Feder genau zwei Schwingungen pro Sekunde ausführt (Für die Kreisfrequenz gilt $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$). Um ein überhaupt schwingfähiges System zu erhalten, muss λ komplex sein. Die Kreisfrequenz ω ist dann der Imaginärteil von λ (Der Realteil bestimmt das Abklingverhalten der Amplitude!), daher gilt:

$$\frac{\sqrt{0.001^2 - 4m \cdot 0.1}}{2m} = 4\pi i\,.$$

Quadrieren und Umformen führt auf eine weitere quadratische Gleichung:

$$64\pi^2 m^2 - \frac{4}{10} m + 0.001^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{1,2} = \frac{\frac{4}{10} \pm \sqrt{\frac{16}{100} - 4 \cdot 64\pi^2 \cdot 0.001^2}}{2 \cdot 64\pi^2} \,.$$

Ausgerechnet erhalten wir $m_1 = 0.6\,\mathrm{g}$ oder $m_2 = 2.5\,\mu\mathrm{g}$, wobei die erste Lösung die technisch sinnvollere ist.

Aufgabe 7:

Ein FM Radioempfänger soll Frequenzen im Bereich 88 MHz bis 108 MHz empfangen können. Wir nehmen an, dass die Empfangsfrequenz die Eigenfrequenz eines idealen Schwingkreises ist. Im Schwingkreis befindet sich eine Spule mit $L = 80\,\mathrm{nH}$. Welchen Bereich muss nun die Kapazität C des Kondensators abdecken, damit wir das gewünschte Frequenzspektrum erhalten, wenn das System durch die Differentialgleichung

$$Lq'' + \frac{1}{C} q = 0$$

beschrieben wird? Warum ist ein System, dass durch obige Differentialgleichung beschrieben wird immer schwingfähig?

Lösung:

Durch Einsetzen der Werte erhalten wir die Gleichung:

$$80 \cdot 10^{-9}\, q'' + \frac{1}{C}\, q = 0\,,$$

mit der charakteristischen Gleichung:

$$80 \cdot 10^{-9}\, \lambda^2 + \frac{1}{C} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{1}{80 \cdot 10^{-9} \cdot C}\,.$$

Dies ergibt die folgende (schwingfähige) Lösung:

$$q(t) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{80 \cdot 10^{-9} \cdot C}}\, t\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{80 \cdot 10^{-9} \cdot C}}\, t\right)\,.$$

Das System schwingt also mit der Frequenz $f = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{80 \cdot 10^{-9} \cdot C}}$, woraus wir C in Abhängigkeit der Frequenz erhalten:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 80 \cdot 10^{-9} \cdot f^2}\,.$$

Setzen wir die Grenzen des gewünschten Frequenzbereiches ein, so ergibt sich:

$$27.15\,\mathrm{pF} \leq C \leq 40.89\,\mathrm{pF}\,.$$

Warum ist das System immer schwingfähig? Betrachten wir die Differentialgleichung, so fällt auf, dass ein Term erster Ordnung mit q' fehlt. Dieser Term beschreibt die Dämpfung. Daher handelt es sich um ein ungedämpftes System. Physikalisch haben wir den Widerstand in den Leitungen und den Bauteilen nicht berücksichtigt, da wir von einem idealem Schwingkreis ausgegangen sind.

Aufgabe 8:

Wir wollen eine Pendeluhr designen. Wie lang muss das Pendel sein, damit wir eine Frequenz von 1 Hz erhalten? Die Uhr kann für kleine Winkel Θ durch die folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$\Theta'' + \frac{g}{\ell}\Theta = 0\,,$$

wobei ℓ die Länge des Pendels beschreibt und g die Erdbeschleunigung ist. Beurteilen Sie ihre Lösung!

Lösung:

Die charakterisitische Gleichung und die Nullstellen lauten:

$$\lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,.$$

Dies ergibt folgende Lösung:

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right)$$

Ein Oszillation mit 1 Hz entspricht:

$$\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 1 \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{g}{4\pi^2} \approx 4.02\,\mathrm{m}\,,$$

was ein ziemlich großer Wert für eine Pendeluhr ist.

Bemerkung: Bei der Beschreibung der Pendelbewegung wurde die Differentialgleichung, die ein mathematisches Pendel beschreibt, verwendet. Zusätzlich wurde die Reibung vernachlässigt. Eine realistischere Beschreibung liefert das physikalische Pendel, bei dem zusätzlich auch Form und Größe des Pendels berücksichtigt werden.