Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 7

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

i) $y'' + y' - 2y = 0$

ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

Lösung:

i) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

mit den beiden Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}\,.$$

ii) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

mit der doppelten Lösungen $\lambda_{1,2} = 2$. Damit erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{2t}$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen. Berechnen Sie hierzu zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und bestimmen Sie anschließend eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (z.B. mit Hilfe der Tabelle aus dem Papula)!

i) $y'' + 2y' + 4y = 4x^2 + 4$

ii) $2y'' - 4y' - 6y = e^{2x}$

Lösung:

i) $y'' + 2y' + 4y = 4x^2 + 4$

Lösung der homogenen Gleichung, d.h. die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{3}\,.$$

Damit ist die homogene Lösung:

$$y_h(x) = e^{-x}\left(C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x)\right)\,.$$

Polynomansatz:

$$Q_n(x) = ax^2 + bx + c\,,\; Q_n'(x) = 2ax + b\,,\; Q_n''(x) = 2a\,.$$

Eingesetzt in die inhomogene Gleichung erhalten wir:

$$2a + 4ax + 2b + 4ax^2 + 4bx + 4c = 4x^2 + 4\,.$$

Umsortiert:

$$4ax^2 + (4a + 4b)x + (2a + 2b + 4c) = 4x^2 + 4\,.$$

Koeffizientenvergleich liefert die drei Gleichungen

$$4a = 4\,,\; 4a + 4b = 0 \text{ und } 2a + 2b + 4c = 4$$

mit den Lösungen $a = 1$, $b = -1$ und $c = 1$. Das ergibt dann die allgemeine Lösung:

$$y(x) = e^{-x}\left(C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2\sin(\sqrt{3}x)\right) + x^2 - x + 1\,.$$

ii) $2y'' - 4y' - 6y = e^{2x}$

Lösung der homogenen Gleichung, d.h. die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1\,,\; \lambda_2 = 3\,.$$

$$y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}\,.$$

Lösungsansatz:

$$y(x) = ae^{2x}\,,\; y'(x) = 2ae^{2x} \text{ und } y''(x) = 4ae^{2x}\,.$$

Eingesetzt in die inhomogene Gleichung erhalten wir:

$$8ae^{2x} - 8ae^{2x} - 6ae^{2x} = e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad -6a = 1$$

also $a = -1/6$. Insgesamt erhalten wir:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{6}e^{2x}\,,.$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden, inhomogenen Differentialgleichung:

$$y'' + 3y' + 2y = \sin(2 \cdot t)\,.$$

Geben Sie anschließend an, welche Terme zum transienten Teil der Lösung gehören und welche Terme den stationären Zustand beschreiben.

Lösung: Wir lösen zuerst die homogene Gleichung:

$$y'' + 3y' + 2y = 0\,.$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad [/tex][tex]\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = -2\,.$$

Der zugehörige homogene Lösungsanteil lautet also:

$$y_h(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}\,.$$

Nun benötigen wir noch eine spezielle inhomogene Lösung. Wir wählen folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} y(x) &= A\cos(2t) + B\sin(2t) \\ y'(x) &= -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ y''(x) &= -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)\,. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die inhomogene Gleichung erhalten wir:

$$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 6A\sin(2t) + 6B\cos(2t) + 2A\cos(2t) + 2B\sin(2t) = \sin(2t)\,.$$

Koeffizientenvergleich (die Koeffizienten vor cos müssen null ergeben und die vor sin eins), ergibt:

$$\begin{aligned} -2A + 6B &= 0 \\ -6A - 2B &= 1\,, \end{aligned}$$

mit der Lösung $A = -\dfrac{3}{20}$ und $B = -\dfrac{1}{20}$. Damit erhalten wir folgende allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\frac{3}{20}\cos(2t) - \frac{1}{20}\sin(2t) + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}\,.$$

Der transiente Anteil wird durch die homogene Lösung (letzten beiden Terme) bestimmt. Er verschwindet für $t \to \infty$. Demnach besteht die stationäre Lösung aus den ersten beiden Ausdrücken, die sin und cos enthalten. Nach einer Einschwingphase (Einschaltvorgang), oszilliert das System also entsprechend zur Anregungsfrequenz.

Aufgabe 4:

Lösen sie die folgende inhomogene Differentialgleichung:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3e^{-2t}$$

Lösung: Die Lösungen der charakteristischen Gleichung lauten $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = -2$. Damit erhalten wir die folgende homogene Lösung:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t}\,.$$

Vergleichen wir die Inhomogenität $3e^{-2t}$ mit der homogenen Lösung, so stellen wir fest, dass die Frequenz bzw. der Faktor in der e-Funktion mit einer Lösung der charakteristischen Gleichung identisch ist. Daher funktioniert der übliche Ansatz $y(t) = ae^{-2t}$ nicht (Resonanz!). Wir müssen wie folgt modifizieren (vgl. z.B. Tabelle Papula):

$$y(t) = a \cdot t \cdot e^{-2t}\,, \quad y'(t) = (1 - 2 \cdot t) \cdot ae^{-2t} \quad \text{und} \quad y''(t) = (t-1) \cdot 4ae^{-2t}\,.$$

Wir setzen den Ansatz in die inhomogene DGL ein:

$$(t-1) \cdot 4ae^{-2t} + 5 \cdot (1 - 2 \cdot t) \cdot ae^{-2t} + 6a \cdot t \cdot e^{-2t} = 3e^{-2t}\,.$$

Umformen und Zusammenfassen liefert zwei Gleichungen, von denen die erste automatisch erfüllt ist:

$$\underbrace{(4a - 10a + 6a)}_{=0} t = 0 \quad \text{und} \quad a = 3$$

Damit lautet die allgemeine, inhomogene Lösung final:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 3te^{-2t}\,.$$

Aufgabe 5:

Wir betrachten ein Feder-Masse-System mit Masse 2 kg, Federkonstante 1 N/m und Reibungskoeffizient 2 Ns/m. Die externe Kraft ist definiert durch $d(t) = \cos(t)$N. Zu Beginn der Beobachtung befindet sich die Masse in der Gleichgewichtslage in Ruhe. Bestimmen Sie die Position nach 2 s.

Lösung: Die Differentialgleichung, die dieses Problem beschreibt lautet:

$$my''(t) +' (t) + ky(t) = d(t)\,,$$

wobei wir für m den Wert der Masse, für ρ den Reibungskoeffizienten, für k die Federkonstante und für $d(t)$ die Gleichung der externen Kraft einsetzen. Die Anfangswerte lauten $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$. Dies ergibt folgende allgemeine Lösung:

$$y(x) = -\frac{3}{5}\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{5}\, e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{2}{5}\, \sin(t) - \frac{1}{5}\, \cos(t)$$

Setzen wir $t = 2\,\mathrm{s}$ ein, ergibt sich: $y(2) = 0.3009656347\,\mathrm{m}$.

Aufgabe 6:

Lösen Sie die folgende Differentialgleichung. Ermitteln Sie hierzu zunächst die Ordnung der DGL. Ist die DGL linear? Ist Sie homogen oder inhomogen?

$$y'' - 2y = y' + \cos(x)$$

Lösung: Es liegt eine inhomogene, lineare DGL 2. Ordnung vor. Der übliche Ansatz führt auf folgendes charakteristisches Polynom für die homogene Geichung:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

mit den beiden Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Damit erhalten wir die homogene Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\,.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir folgenden Ansatz:

$$y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)\,.$$

Dies führt nach Differenzieren und Einsetzen in der inhomogenen DGL auf ein 2×2 Gleichungssystem mit den Lösungen $A = -3/10$ und $B = -1/10$. Damit erhalten wir schließlich die folgenden allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{10}\cos(x) - \frac{1}{10}\sin(x)\,.$$

Aufgabe 7:

Eine Masse von $4\,\mathrm{kg}$ sei verbunden mit einer Feder mit einer Federkonstante von $1\,\mathrm{N/m}$. Die Masse befindet sich zu Beginn der Beobachtung in Ruhe in der Position $y(0) = 0\,\mathrm{m}$. Wir machen die vereinfachende Annahme, dass kein Reibung vorliegt bzw. vernachlässigt werden kann. Ferner wirkt die externe Kraft $d(t) = \cos(1/2t)$ auf die Masse.

i) Bestimmen Sie die Position der Masse zur Zeit $t = 2\,\mathrm{s}$.

ii) Erreicht die Masse jemals die Position $y = 100\,\mathrm{m}$?

iii) Gibt es Positionen y, welche die Masse niemals erreicht?

iv) Diskutieren Sie an Hand Ihrer Ergebnisse, ob unsere Annahme, dass wir die Reibung vernachlässigen können, sinnvoll war.

Lösung: Bei dieser Aufgabe ist die Frequenz der externen Kraft gleichzeitig eine Lösung der charakteristischen Gleichung. Daher müssen wir den übliche Lösungsansatz modifizieren (vgl. z.B. Tabelle im Papula). Mit den Anfangswerte $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ erhalten wir folgende Lösung:

$$y(t) = \frac{1}{4}\, t\, \sin\left(\frac{1}{2}t\right) .$$

i) $y(2) = 0.4207\,\mathrm{m}$.

ii) Die Masse erreicht 100 m nach ca. 400 s.

iii) Die Masse kann jede Position erreichen, da die Lösung eine Schwingung mit wachsender Amplitude ist (Resonanzfall!).

iv) Es handelt sich um keine sinnvolle Annahme, da es nicht realistisch ist, dass ein System mit beschränkter Energiezufuhr über alle Grenzen wächst.