Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 8

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Laplace Transformation der folgenden Funktionen, indem sie das Integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-t \cdot s} \, dt$$

berechnen.

i) Sprungfunktion: $f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

ii) $f(t) = t$

Lösung:

i) Wir müssen folgendes Integral berechnen:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \,.$$

Für $s \leq 0$ existiert das Integral nicht, daher finden wir nur eine Laplace Transformierte für $s > 0$.

ii) Mit partieller Integration erhalten wir:

$$F(s) = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} \, dt = -\frac{1}{s} t e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} \, dt = \frac{1}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s^2}$$

Aufgabe 2: Ein PID-Regler mit proportionalem, integralem und differentiellem Verhalten wird durch folgende Gleichung im Zeitbereich beschrieben:

$$y(t) = K_C \cdot \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) \, d\tau + T_D \cdot e'(t) \right) .$$

Leiten Sie die entsprechende Gleichung im Laplace Bereich her, welche den PID-Regler beschreibt. Nehmen Sie hierbei an, dass die Regelabweichung $e(t)$ zu Beginn verschwindet.

Lösung: Wir wenden den Integrations- und den Ableitungssatz an (vgl. z.B. Tabelle Papula):

$$Y(s) = K_c \cdot \left(E(s) + \frac{1}{T_I} \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s) + T_D \cdot s \cdot E(s) \right) .$$

Aufgabe 3: Wenden Sie den Ableitungssatz an, um folgende Differentialgleichung erster Ordnung in den Laplace Bereich zu überführen:

$$y'(t) = a \cdot y(t) , \quad y(0) = 1 .$$

Lösen Sie anschließend die entstandene algebraische Gleichung nach $Y(s)$ auf und führen Sie ein Rücktransformation in den Zeitbereich durch. Nutzen sie hierfür:

$$e^{-at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+a} .$$

Lösung: Die transformierte DGL lautet:

$$sY(s) - y(0) = aY(s) .$$

Setzen wir die Anfangswert $y(0) = 1$ ein und formen um, erhalten wie die folgende Lösung im Laplace Raum:

$$sY(s) - 1 = aY(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s-a} .$$

Wenden wir die angegebene Rücktransformationstabelle an, so erhalten wir:

$$y(t) = e^{at} .$$

Aufgabe 4: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem, indem sie die Laplace Transformation anwenden und anschließend zurück in den Zeitbereich transformieren:

$$2y'(t) + 2y(t) = \sigma(t) , \quad y(0) = 1 ,$$

wobei die Inhomogenität die Sprungfunktion ist. Verwenden Sie folgende Regel für die Rücktransformation:

$$e^{-at} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+a} .$$

Weiter können Sie die folgende Partialbruchzerlegung verwenden:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} .$$

Lösung: Wenden wir die Laplace Transformation an, erhalten wir:

$$2sY(s) - 2y(0) + 2Y(s) = \frac{1}{s} .$$

Umformen ergibt:

$$(2s+2)\cdot Y(s) = 2 + \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{2}{2+2s} + \frac{1}{s(2s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s(s+1)}\,.$$

Den ersten Summanden können wir direkt transformieren: $\frac{1}{s+1} \;\leftrightarrow\; e^{-t}$. Beim zweiten Summanden müssen wir zuerst eine Partialbruchzerlegung durchführen:

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\,.$$

Wenn wir diesen Ausdruck noch mit 1/2 multiplizieren und dann rücktransformieren, ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} \;\leftrightarrow\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t}\,.$$

Damit ergibt sich zusammengefasst folgende Lösung im Zeitbereich:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 5: Ein sogenanntes PT2-Regelkreisglied wird durch folgende Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben:

$$T^2\cdot y''(t) + 2dT\cdot y'(t) + y(t) = K\cdot u(t)\,,$$

wobei K der Verstärkungsfaktor des Eingangssignals $u(t)$ bezeichnet, $T > 0$ die Zeitkonstante ist und $d > 0$ die dimensionslose Dämpfung des Systems angibt.

Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion! Gehen Sie hierbei, wie üblich, von verschwindenen Anfangswerten aus.

Lösung: Wir transformieren die DGL mit verschwindenen Anfangswerten in den Laplace Bereich und erhalten

$$T^2s^2Y(s) + 2dTsY(s) + Y(s) = K\cdot U(s)\,.$$

Klammern wir $Y(s)$ aus und bilden den Quotienten, erhalten wir folgende Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{T^2s^2 + 2dTs + 1}\,.$$

Aufgabe 6: Wir betrachten folgende DGL 2. Ordnung:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2 = u(t)\,.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL auf herkömmliche Art und Weise für $u(t) = 0$, d.h. lösen sie die homogene DGL mit Hilfe der chatakteristischen Gleichung.

Bestimmen Sie anschließend die Übertragungsfunktion (wieder mit verschwindenden Anfangswerten). Berechnen Sie die Polstellen der Übertragungsfunktion, d.h. die Nullstellen des Nenners. Was stellen Sie fest, wenn Sie dies mit dem herkömmlichen Lösungsverfahren vergleichen?

Lösung: Wir betrachten die DGL:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2 = 0\,.$$

Die charakterisitsche Gleichung lautet $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ und besitzt die Lösungen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_1 = -1$. Daher erhalten wir folgende allgemeine Lösung: $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t}$.

Tranformieren wir die DGL $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t)$ ergibt sich:

$$s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(t) = U(s)$$

und daraus schließlich die Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\,.$$

Um die Polstellen zu bestimmen, setzen wir die Nenner gleich null: $s^2 + 2s + 2 = 0$. Die Lösungen lauten $s_1 = -2$[/tex] und $s_1 = -1$. Vergleichen wir diese Polstellen mit den Lösungen der charakterisitschen Gleichung, so stellen wir fest, dass sie identisch sind, da die charakterisitische Gleichung mit dem nenner der Übertragungsfunktion übereinstimmt.

Diese Beobachtung gilt allgemein, d.h. die charakterisitische Gleichung stimmt mit dem Nenner der Übertragungsfunktion überein. Dies demonstriert noch einmal, dass die Übertragunsfunktion im Laplace bereich analog zur DGL im Zeitbereich zu sehen ist und alle Informationen über die Lösung enthält.