Übungen zu Mathematik II
SoSe 2022
Blatt Woche 9

Aufgabe 1: Ein System wird in der Regelungstechnik stabil genannt, wenn die Antwort auf jedes beschränkte Eingangssignal ebenfalls beschränkt ist. Ein Kriterium, um die Stabilität zu überprüfen, sind die Polstellen der Übertragungsfunktion. Besitzen diese einen negativen Realteil, so ist das System stabil.

Überprüfen Sie bei den folgenden Systemen, ob diese Stabil sind:

i) $y''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = u(t)$

ii) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = u(t)$

iii) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u(t)$

iv) $y''(t) + 2y'(t) + 8y(t) = u(t)$

Lösung:

i) $y''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = u(t)$

Die Übertragungsfunktion lautet: $G(s) = \dfrac{1}{s^2 - 2s + 4}$ und besitzt die folgenden Polstellen: $s_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Da die Realteile beide positiv sind, ist das System nicht stabil.

ii) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = u(t)$

Die Übertragungsfunktion lautet: $G(s) = \dfrac{1}{s^2 - s - 2}$ und besitzt die folgenden Polstellen: $s_1 = 2$ und $s_2 = -1$. Da der Realteil der ersten Lösung positiv ist, ist das System nicht stabil.

iii) $y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = u(t)$

Die Übertragungsfunktion lautet: $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 3}$ und besitzt die folgenden Polstellen: $s_1 = -1$ und $s_2 = -3$. Da die Realteile beide negativ sind, ist das System stabil.

iv) $y''(t) + 2y'(t) + 8y(t) = u(t)$

Die Übertragungsfunktion lautet: $G(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 8}$ und besitzt die folgenden

Polstellen: $s_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{7}$. Da die Realteile beide negativ sind, ist das System stabil.

Aufgabe 2: Überführen Sie die folgende Differentialgleichung in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$y^{(4)}(t) + 2y'(t) + y(t) = \sin(t)$$

Geben Sie dieses System in Matrix-Vektor-Schreibweise an.

Lösung: Die Differentialgleichung besitzt die Ordnung vier, daher benötigen wir vier Hilfsfunktionen x_1 bis x_4, die wir wie folgt definieren:

$$x_1(t) := y(t)\,,\; x_2(t) := y'(t)\,,\; x_3(t) := y''(t)\,,\; x_4(t) := y'''(t)$$

Wir leiten die vier Gleichungen auf beiden Seiten ab:

$$x_1'(t) = y'(t)\,,\; x_2'(t) = y''(t)\,,\; x_3'(t) = y'''(t)\,,\; x_4'(t) = y^{(4)}(t)$$

Im nächsten Schritt ersetzen wie alle Terme mit y durch Terme mit den x_i, indem wir die Definitionen verwenden bzw. bei der letzten Gleichung die DGL:

$$x_1'(t) = x_2(t)\,,\; x_2'(t) = x_3(t)\,,\; x_3'(t) = x_4(t)$$

$$x_4'(t) = -2y'(t) - y(t) + \sin(t) = -2x_2(t) - x_1(t) + \sin(t)\,.$$

Damit erhalten wir die folgende Matrix-Vektor-Version:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} + \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Aufgabe 3: Wir betrachten ein Feder-Masse-Dämpfer System, das durch die folgende Differentialgleichung beschrieben wird:

$$my''(t) + \rho y'(t) + ky(t) = 0$$

i) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des Systems an, wenn wir nur an der Position $y(t)$ als Ausgangsgröße interessiert sind.

ii) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems.

iii) Im System werden die folgenden Größen verwendet:

$$m = 1\text{kg}\,,\; \rho = 0.1\text{Ns/m}\,,\; k = 0.25\text{N/m}\,.$$

Ist das System stabil?

Lösung:

i) Wir führen zwei Hilfsvariablen ein, die beiden Zustände x_1 und x_2 und leiten ab:

$$x_1(t) := y(t)\,,\; x_2(t) := y'(t) \quad \Rightarrow \quad x_1'(t) := y'(t)\,,\; x_2'(t) := y''(t)\,.$$

Wir ersetzen y' und y'' durch die Definition bzw. die DGL:

$$x_1'(t) := y'(t) = x_2(t)\,,\; x_2'(t) := y''(t) = -\frac{\rho}{m}y'(t) - \frac{k}{m}y(t) = -\frac{\rho}{m}x_2(t) - \frac{k}{m}x_1(t)$$

Damit erhalten wir die Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\rho}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \\ y(t) &= (1\,,\,0) \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii) Wir transformieren die inhomogene DGl in den Laplace Bereich und lösen bzgl. $Y(s)$ auf. Die Anfangswerte verschwinden, wie üblich! Damit ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + \rho s + k}$$

iii) Wir setzen die Werte in der Übertragungsfunktion ein:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.1s + 0.25}$$

und bestimmen die Polstellen (Nullstellen des Nenners):

$$s_{1,2} = -\frac{1}{20} \pm i\frac{3\sqrt{11}}{20}\,.$$

Der Realteil ist negativ, also ist das Feder-Masse-System stabil.

Aufgabe 4: Wir finden im Datenblatt eines Gleichstrommotors folgende Angaben:

Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{K_m}{J_{eq}R_m s + K_m^2}\,.$$

Hierbei ist K_m die Konstante des Motors, R_m der Ankerwiderstand und J_{eq} das Ersatzträgheitsmoment des Motors.

An der Übertragungsfunktion sehen wir, dass sich der Motor wie ein PT1-System verhält. Bestimmen Sie den proportionalen Beiwert K (die Verstärkung) und die Zeitkonstante T, indem Sie die angegebene Übertragungsfunktion mit der Übertragungsfunktion in Standardform für ein PT1-System vergleichen:

$$G_{PT1}(s) = \frac{K}{Ts+1}\,.$$

Wie ändert sich das Zeitverhalten des Systems, wenn der Ankerwiderstand R_m vergrößert bzw. verkleinert wird? Reagiert das System schneller oder langsamer?

Lösung: Die Standardform der Übertragungsfunktion eines PT1-Systems lautet:

$$G_{PT1}(s) = \frac{K}{Ts+1}\,.$$

Vergleichen wir die angegebene Übertragunsfunktion des Motors mit dieser Version, sehen wir, dass wir den Nenner umformen müssen. Wir klammern dazu K_m^2 aus und erhalten:

$$G(s) = \frac{K_m}{J_{eq}R_m s + K_m^2} = \frac{K_m}{K_m^2\left(\frac{J_{eq}R_m}{K_m^2}s+1\right)} = \frac{1/K_m}{\frac{J_{eq}R_m}{K_m^2}s+1}\,.$$

Damit erhalten wir als proportionalen Beiwert $K = 1/K_m$ und für die Zeitkonstante $T = \frac{J_{eq}R_m}{K_m^2}$.

Zur Frage nach dem veränderten Zeitverhalten: Wir betrachten die Zeitkonstante. Der Ankerwiderstand R_m steht im Zähler, daher wird die Zeitkonstante größer, wenn wir den Widerstand vergrößern. In diesem Fall regiert das System langsamer. Bei einem kleineren Ankerwiderstand reagiert das System analog schneller.

Zusatzaufgabe 1: Wir betrachten die Wärmeverteilung in einem Rührkessel (siehe Abb. 1). Als Eingangsgrößen haben wir die Volumenströme F_{in} und F_{out}, die auf Grund der Massenerhaltung gleich groß sind, d.h. es gilt $F_{in} = F_{out} = F$. Die thermischen Eingangsgrößen sind die Einlaßtemperatur des Fluides ϑ_{in} und die Leistung der elektrischen Heizung P_{el}.

Da der Rührkessel als gut durchmischt angenommen wird, entspricht die Ausgangstemperatur ϑ_{out} der homogenen Temperatur ϑ im Kessel. An dieser Temperatur sind wir interessiert. Eine Energiebilanz liefert folgende DGL 1. Ordnung, welche den Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen und der Ausgangsgröße ϑ beschreibt:

$$\rho \cdot V \cdot c_p \cdot \dot{\vartheta}(t) + \rho \cdot F \cdot c_p \cdot \vartheta(t) = \rho \cdot F \cdot c_p \cdot \vartheta_{in}(t) + P_{el}\,.$$

Formen Sie die DGL in die Standardform eines PT1-Systems um und bestimmen Sie die Übertragungsfunktion, die den Zusammenhang der Eingangsgröße P_{el} und der Temperatur ϑ beschreibt. Bestimmen Sie weiter den proportionalen Beiwert K (bzgl. P_{el}) und

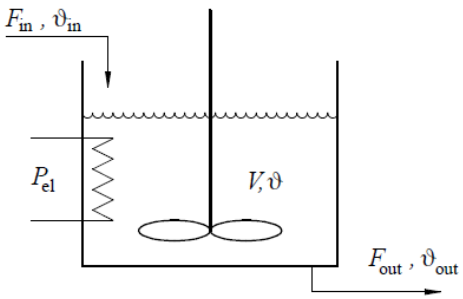


Abbildung 1: Rührkessel mit Eingangs- und Ausgangsgrößen.

die Zeitkonstante T. Wie hängt das Zeitverhalten des Systems vom Volumenstrom F ab, d.h. was passiert wenn wir F vergrößern/verkleinern? Reagiert das System schneller/langsamer?

Lösung: Da die Standardform für ein PT1-System $T\dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$ ist, müssen wir den Koeffizienten vor dem ϑ zu eins umformen. Wir dividieren daher durch $\rho \cdot F \cdot c_p$:

$$\underbrace{\frac{V}{F}}_{=:T} \dot{\vartheta} + \vartheta = \vartheta_{in} + \underbrace{\frac{1}{\rho \cdot F \cdot c_p}}_{=:K} P_{el} \,.$$

Die entsprechenden Parameter sind in der Gleichung gekennzeichnet. Da F im Nenner beim Ausdruck für die Zeitkonstante T steht, gilt:

Ein größerer Volumenstrom bedeutet eine kleinere Zeitkonstante und somit einen schnelleren Prozess. Verkleinern wir den Volumenstrom wird die Zeitkonstante größer, d.h . der Prozess wird langsamer. Dies macht physikalisch Sinn, da bei einem größeren Volumenstrom das Fluid schneller ausgetauscht wird.

Die Standardform der Übertragungsfunktion für ein PT1-System lautet:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \,.$$

Setzen wir die obigen Parameter ein, erhalten wir die Übertragungsfunktion des Rührkessels.

Zusatzaufgabe 2: Wir betrachten ein System, von dem wir wissen, dass es PT1-Verhalten besitzt. Um das System beschreiben zu können müssen wir die Zeitkonstante T und den Verstärkungsfaktor K in der zugehörogen DGL bestimmen:

$$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t) \,.$$

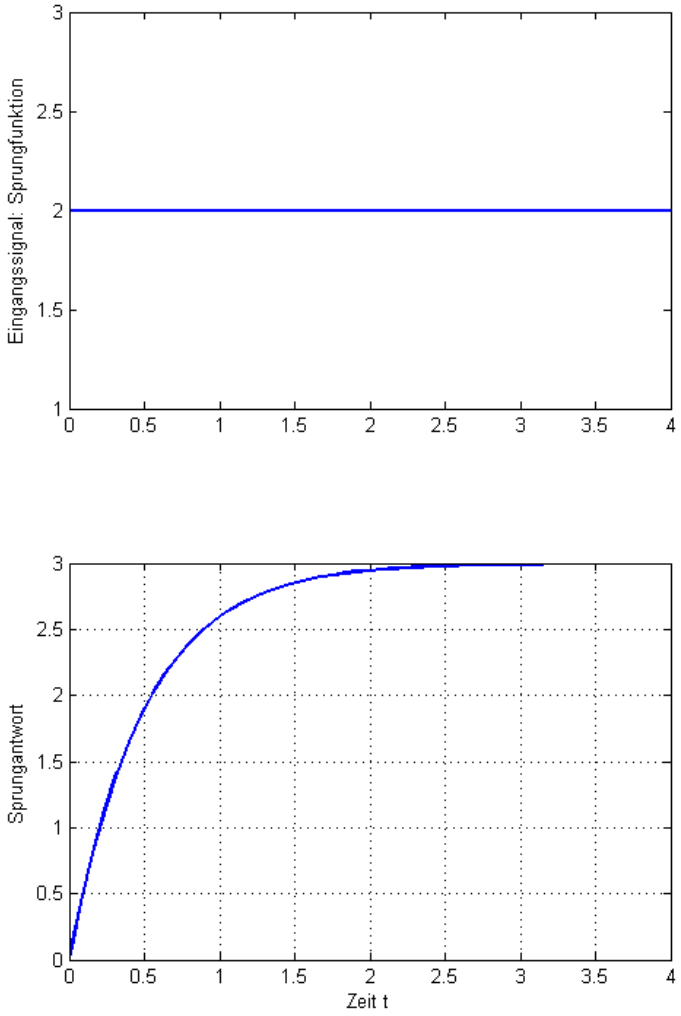


Abbildung 2: Sprungfunktion (oben) und Sprungantwort des Systems (unten).

Hierzu geben wir als Eingangssignal einen Sprung mit der Amplitude $\hat{u}$ auf das System und plotten die zugehörige Sprungantwort. Der Sprung und die Antwort werden in Abb. 2 gezeigt. Bestimmen Sie hieraus die beiden Parameter!

Lösung: Im oberen Plot sehen wir die Sprungfunktion, die als Eingangssignal auf das System gegeben wird. Wir können ablesen, dass die Amplitude $\hat{u} = 2$ ist.

Im unteren Plot wird die Sprungantwort gezeigt. Der Grenzwert, gegen den das Signal für große Zeiten konvergiert beträgt drei. Damit erhalten wir für die Verstärkung:

$$K\hat{u} = 3 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{3}{\hat{u}} = \frac{3}{2} = 1.5\,.$$

Als nächstes müssen wir die Tangente an die Sprungantwort um Ursprung einzeichnen

(siehe Abb 3). Für die Steigung erhalten wir ungefähr $m = 5$. Aus der folgenden Formel ergibt sich dann die Zeitkonstante T:

$$\frac{K\hat{u}}{T} =, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{K\hat{u}}{5} = \frac{3}{5} = 0.6\,.$$

Zum Vergleich: der exakte Wert liegt bei $T = 0.5$. Die Abweichung stammt daher, dass wir die Tangente natürlich nur ungefähr einzeichnen können und auch beim Ablesen der Steigung Fehler machen.

Zusatzaufgabe 3: Lösen Sie das folgende System von DGLs, indem Sie es in den Laplace Bereich Transformieren, dort das System nach $X(s)$ und $Y(s)$ auflösen und dann die Rücktransformation bestimmen:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - 2y(t) \\ y'(t) &= x(t) - y(t)\,. \end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind wie folgt definiert: $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$.

Lösung: Wir wenden die Laplace Transformation an und erhalten:

$$\begin{aligned} sX(s) - 1 &= X(s) - 2Y(s) \\ sY(s) &= X(s) - Y(s)\,. \end{aligned}$$

Lösen wir das entsprechende Gleichungssystem nach $X(s)$ und $Y(s)$ auf ergibt sich:

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} \quad \text{and} \quad Y(s) = \frac{1}{s^2+1}\,.$$

Wir bilden anschließend die Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$x(t) = \cos t + \sin t \quad \text{and} \quad y(t) = \sin t\,.$$

Um zu überprüfen, ob die erhaltene Lösung korrekt ist, können Sie beide Funktionen in das Ausgangssystem einsetzen. Ferne können Sie die Anfangswerte checken, indem Sie $t = 0$ in die Lösungen einsetzen.

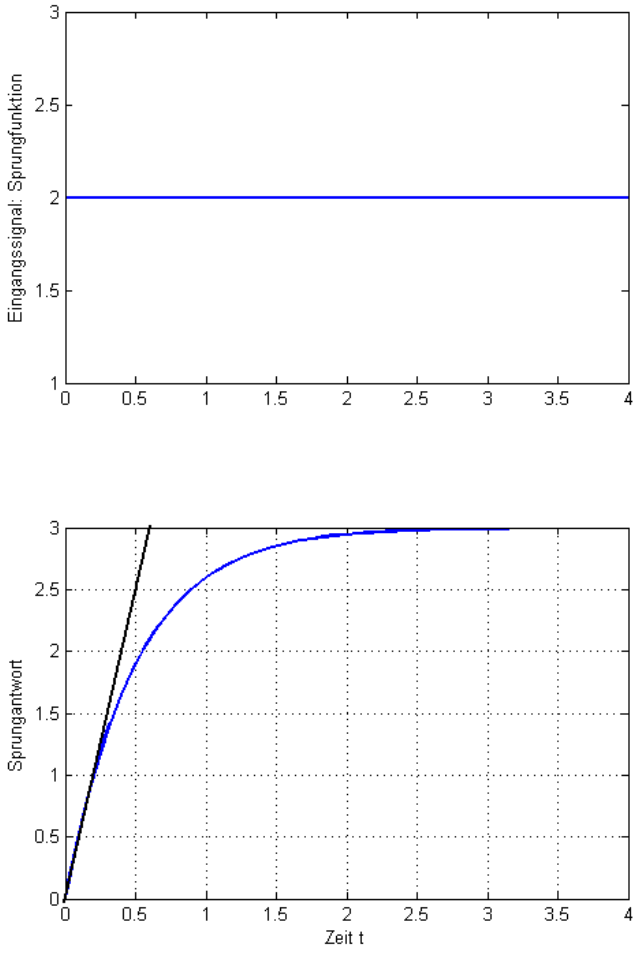


Abbildung 3: Sprungfunktion (oben) und Sprungantwort des Systems (unten).