Probeklausur zu Mathematik III

WS 2022/2023

Prof. Dr. M.Pieper **Datum: Januar 2023**

Vorname: Nachname:

Note: Matrikelnummer:

PBL (zutreffendes Ankreuzen): ja nein

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
max. Punkte	10	10	10	10	40
Punkte					

Hinweise:

- Bitte nutzen Sie Vorder- und Rückseite zum Bearbeiten der Aufgaben und schreiben Sie Ihre Lösungen bitte immer direkt zu den entsprechenden Aufgaben.
- Bitte lösen Sie *nicht* die Heftklammern.
- Sie dürfen einen normalen, nicht grafikfähigen Taschenrechner verwenden.
- Erlaubt ist ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt als Formelsammlung.

Aufgabe 1: (Fehlerrechnung) Es soll die Rotationsenergie

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

eines Vollzylinders bestimmt werden, der um seine Symmetrieachse rotiert. Wir messen folgende Werte für die Winkelgeschwindigkeit ω in 1/s:

$$1.1\,,\ \ 0.95\,,\ \ 1.12\,,\ \ 1.1 \quad \text{und} \quad 0.98\,.$$

Für das Trägheitsmoment gilt:

$$J = m \cdot r^2\,,$$

wobei die Masse $m = (1 \pm 0.05)$ kg beträgt und der Radius $r = (0.05 \pm 0.001)$ m ist.

a) Geben Sie die Messung der Winkelgeschwindigkeit in der Form $\omega + \Delta\omega$ an. Bestimmen Sie dazu den Messwert ω und die Toleranz $\Delta\omega$ mit statistischen Methoden.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der differentiellen, linearen Fehlerrechnung einen Wert für die zu erwartende Abweichung ΔE_{rot}. Wie groß ist der zu erwartende prozentuale Fehler?

Aufgabe 2: (Vektoranalysis/Maxwell Gleichung)

a) Ist folgendes Vektorfeld konservativ?

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} .$$

b) Für das elektrostatische Feld $\vec{B}$ gilt die folgende Maxwell Gleichung:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \vec{0} .$$

Was bedeutet diese Gleichung physikalisch (max. drei Sätze!)?

c) Integrieren Sie die Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 .$$

über das Volumen V und wenden Sie den Gauß'schen Integralsatz an, um die Integrale Form der Maxwell-Gleichung herzuleiten.

Aufgabe 3: (Mehrdimensionale Integration)

a) Bestimmen Sie die mittlere Temperatur

$$\bar{T} = \frac{1}{|K|} \iint\limits_K T(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$

der Temperaturverteilung $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ über den Kreis K mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $R = 1$. Hierbei bezeichnet $|K|$ den Flächeninhalt des Kreises.

b) Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche ∂W des Einheitswürfels W.

Aufgabe 4: (Partielle Differentialgleichungen)

a) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet Randbedingungen. Welche Vorgabe liegt am Rand vor? Wird die Temperatur vorgegeben, die Normalableitung (der Wärmefluss) oder werden beide Angaben als gemischte Randbedingung vorgegeben?

b) Wir betrachten folgende partielle Differentialgleichung:

$$3\partial_x^2 u + 2\partial_y^2 u - \partial_x u + \partial_y u = f$$

Hamdelt es sich um eine elliptische, parabolische oder hyperbolische Differentialgleichung?

Viel Erfolg!