Übungen zu Mathematik I
Blatt 13

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve im angegebenen Intervall:

a) $f(x) = x^3 - 4x$ zwischen den Nullstellen

b) $f(x) = (1 + e^x)^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die Fläche zwischen den beiden Kurven:

$$f(x) = x^2 - 4 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3 - 4x\,.$$

Aufgabe 3: Wir wollen die Energiemenge in kWh bestimmen, die eine Solaranalge an einem Sommertag erbringt. Dazu wurde die Direkteinstrahlung in W/m^2 an einem warmen Augusttag im Abstand von 2h während der Sonneneinstrahlung gemessen. Die Messdaten zeigt Abb. 1. Unsere Solaranlage besteht aus 5 Modulen, mit einer Fläche von je $1,28\,m^2$.

a) Wir approximieren die Fläche unter der Messkruve indem wir die Messergebnisse summieren und mit dem Zeitabstand von $2h$ multiplizieren. Bestimmen Sie mit dieser Methode die erbrachten kWh.

b) Die Messkrurve kann durch eine Parabel approximiert werden:

$$f(t) = -11t^2 + 270t - 1351\,.$$

Bestimmen Sie erneut die erbrachten kWh, indem Sie nun die approximierte Parabel verwenden.

Stunden h	7	9	11	13	15	17
Direkteinstrahlung in W/m^2	28,098	123,051	293,698	301,260	260,000	34,386

Abbildung 1: Messwerte zur Direkteinstrahlung in Aufgabe 3

Aufgabe 4: Ein Heliumballon startet am Erdboden senkrecht nach oben. Seine Geschwindigkeit lässt sich durch die Funktion $v(t)$ beschreiben:

$$v(t) = \frac{10}{t^2 + 2t + 1}\,.$$

Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden nach dem Start zur Zeit $t = 0$ und $v(t)$ wird in km/h angegeben.

a) Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Ballon zu Beginn?

b) Zeigen Sie, dass sich der Ballon stets aufwärts bewegt.

c) Welche Höhe kann der Ballon maximal erreichen?

d) Wie lange dauert es, bis der Ballon die Hälfte der maximalen Höhe erreicht hat? Welche Geschwindigkeit hat er zu diesem Zeitpunkt?

Hinweis: Es könnte nützlich sein, den Nenner mit Hilfe der binomischen Formel zusammenzufassen.

Aufgabe 5: Wir interessieren uns für das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn wir die Funktion

$$f(x) = -\frac{2}{x}$$

im Bereich $[2, \infty)$ um die x-Achse rotieren lassen. Entsteht ein endliches Volumen? Wenn ja, wie groß ist es?