Übungen zu Mathematik I

Blatt 4

Aufgabe 1: Stellen Sie $\vec{d}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar! Ist dies auf eindeutige Art und Weise möglich? Begründen Sie Ihre Antwort!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Gegeben sind folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 := \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie den Vektor

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ dar.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Es sei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ die Standardbasis. Untersuchen Sie ob die folgenden Systeme von Vektoren linear unabhängig sind. Spannen Sie den $\mathbb{R}^3$ auf? Bilden sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$

b) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3\}$

c) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 + \vec{e}_2\}$

Aufgabe 6: Wir wollen das Dreieck, das aus den Punkten $A = (2, 1)$, $B = (4, 3)$ und $C = (4, 1)$ besteht an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten spiegeln. Dazu verwenden wir die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und multiplizieren die zu den Punkten zugehörigen Vektoren mit der Matrix. Führen Sie diese Multiplikation aus und zeichnen Sie anschließend das Dreieck und das gespiegelte Dreieck in ein Koordinatensystem.

Die Determinante von H gibt an, wie sich die Fläche unter der zugehörigen Abbildung (Spiegelung) verändert. Welchen Wert vermuten Sie? Berechnen Sie die Determinante und vergleichen Sie.

Aufgabe 7: Wir betrachten den Materialverpflechtungsplan in Abb. 1. Stellen Sie die

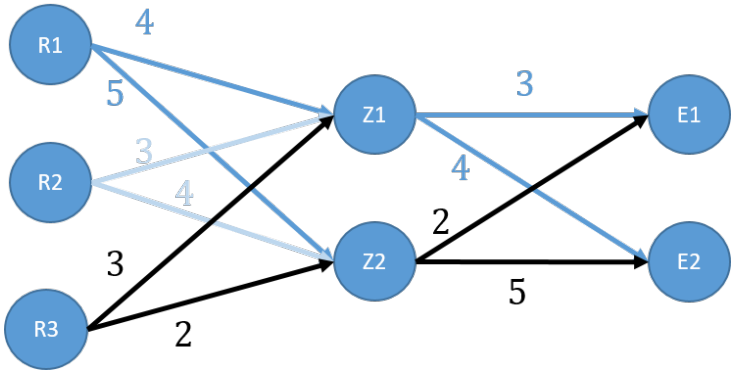


Abbildung 1: Materialverpflechtungsplan zu Aufgabe 2

zugehörigen Matrizen auf, d.h. die Matrix A, welche den Zusammenhang der drei Ressourcen R_1, R_2 und R_3 mit den beiden Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 beschreibt und die Matrix B, welche den Zusammenhang der Zwischenprodukte mit den beiden Endprodukten E_1 und E_2 beschreibt. Berechnen Sie daraus die Matrix, welche den direkten Zusammenhang zwischen Ressourcen und Endprodukten beschreibt. Wie viele Ressourcen werden benötigt, um 30 Mengeneinheiten vom Produkt E_1 und 25 von E_2 herzustellen?

Aufgabe 8: Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, sodass die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht leer ist. Geben Sie in diesem Fall auch die Lösungsmenge an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 + 2x_5 & = & -1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & -x_3 & & + x_5 & = & a \end{array}$$